Introduzione

Fin dai tempi antichi l'uomo ha condotto indagini sulla natura dell'universo, cercando di capirne l'origine e la struttura. In particolar modo la ricerca si è concentrata per secoli sullo studio dei pianeti e delle loro orbite. A seguito della rivoluzione scientifica galileiana, con Copernico e soprattutto con Keplero e Newton, quest'ultimo problema è stato affrontato con un approccio matematico, che ha permesso di ottenere ottimi risultati dall'evidenza sperimentale.

Durante la trattazione di questa tesi verrà esposto con strumenti del calcolo vettoriale e differenziale il cosidetto "problema dei due corpi", ovvero lo studio della dinamica di due corpi soggetti alla mutua interazione gravitazionale. Il primo capitolo è infatti dedicato alla descrizione dei moti centrali, esibendone alcune proprietà, come la conservazione del momento angolare e dell'energia meccanica. Successivamente si fa vedere che il problema dei due corpi è un particolare moto centrale e questo ci permette di calcolare le orbite e dimostrare le leggi di Keplero. Il problema fu risolto per la prima volta da Newton nel *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, testo pubblicato tra il 1686 e 1687, che contiene la formulazione della legge di gravitazione universale.

Lo scopo della tesi, però, non è esclusivamente quello di mostrare come la trattazione con il linguaggio moderno permetta di giungere agevolmente a tale risultato, ma anche quello di illustrare i progressi successivi. Verrà dimostrato ad esempio il teorema di Bertrand, enunciato la prima volta nel 1873 come *"Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe"*, che determina le possibili formule dell' intensità dei campi di forze centrali. Verrà presentata la teoria delle trasformazioni canoniche e delle parentesi di Poisson che permettono di studiare più a fondo la conservazione del vettore di Lagrange-Runge-Lenz (LRL) in un moto kepleriano. Il vettore fornisce infatti ulteriori integrali primi, rendendo il problema di Keplero massimamente superintegrabile. Tramite le parentesi di Poisson verrà esplicitata la simmetria nascosta prevista dal teorema di Noether. Esiste una simmetria che lascia inalterata l'hamiltoniana, coinvolgendo lo spazio delle fasi, di dimensione superiore superiore a 3. Infatti, nonostante il problema sia tridimensionale, è invariante per rotazioni di $SO(4)$.