L'integrabilità del problema dei due centri fissi

Maria Iolanda Serra

9 novembre 2013

Riassunto tesi triennale della laurea in matematica
Appello del 2 dicembre 2013

Il problema per eccellenza, in fisica matematica, è quello dell'interazione gravitazionale di n corpi. Tale problema risulta integrabile solo per $n = 2$; per $n > 2$ sono necessarie delle ipotesi restrittive e quello dei due centri fissi, oggetto della tesi, risponde a queste caratteristiche: esso è un problema dei 3 corpi ristretto. La situazione fisica studiata prevede l'interazione gravitazionale di 3 masse M_1, M_2, m che si attraggono reciprocamente e lo scopo è determinare l'orbita della massa m: le due masse M_1 e M_2 occupano una posizione fissa nel tempo, mentre la terza massa è libera di muoversi e si suppone che essa non eserciti forza gravitazionale su M_1 e M_2 (ossia $m << M_i \; \forall i = 1, 2$).

Lo studio che ho effettuato focalizza l'attenzione sull'integrabilità di tale problema e di alcune sue varianti, come il caso a masse variabili. La tesi è sviluppata, quindi, su due piani complementari: quello del concetto generale di integrabilità dei sistemi hamiltoniani e quello specifico del problema dei due centri fissi.

Nel capitolo 1 ho richiamato le definizioni ed i teoremi principali della teoria dei sistemi hamiltoniani basandomi sul materiale del corso di *Meccanica Celeste* del professor A. Giorgilli [1] e su [2]. In particolare, dopo aver definito l'*hamiltoniana* di un sistema e chiarito il concetto di *integrabilità* da me adottato, ho enunciato e dimostrato il *teorema di Liouville*, classico risultato sui sistemi hamiltoniani. Successivamente ho presentato il metodo di Hamilton-Jacobi che viene utilizzato largamente per la risoluzione di sistemi dinamici integrabili.

Nel capitolo 2 ho presentato il problema dei due centri fissi classico e ne ho proposto la risoluzione di Eulero del 1760-65, come in [4]. Successivamente mi sono soffermata su una variante del problema classico, la situazione in cui i due centri fissi sono a massa variabile. Ho sfruttato, per questa parte, gli studi di A.A. Bekov, T.B. Omarov del 1978 come presentati in [5] ed ho potuto analizzare l'utilizzo specifico del metodo di Hamilton-Jacobi precedentemente descritto. Infine ho osservato, da [6], la non-integrabilità di un sistema con potenziale della forma $V = -ar^{-2n}$ nel caso in cui $n \neq 2$.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Giorgilli. *Dispense del corso di Meccanica Celeste (a.a. 2008/2009).*

[2] G.Benettin, L.Galgani, A.Giorgilli. *Appunti di Meccanica Razionale (a.a. 1991/1992).*

[3] D. Ò Mathúna. *Integrable Systems in Celestial Mechanics.* Birkhäuser, 2007.

[4] W. Neutsch, K. Scherer. *Celestial Mechanics. An Introduction to classical and contemporary methods.* B.I. Mannheim, 1992.

[5] A.A. Bekov, T.B. Omarov. *Integrable cases of the Hamilton-Jacobi equation and some nonsteady problems of celestial mechanics.* Astrophysics Institute, Academy of Sciences of the Kazakh SRR, 1977.

[6] A.J. Maciejewki, M.Przybylska *Non-integrability of the generalized two fixed centres problem.* Kluwer Academic Publishers, 2004.

[7] M.A. de Cataldo *Integrali ellittici.* Lezione pubblica tenuta presso il dipartimento di matematica F. Enriques dell'Università degli studi di Milano, 2006.