

# Metodi matematici per il calcolo delle correzioni al light-time nell'approssimazione post-Newtoniana

Candidato: Vincenzo Di Pierri  
Relatore: Dott. Giacomo Tommei

Sessione di laurea: 18 Ottobre 2013

Questa tesi tratta di correzioni relativistiche nel formalismo post-Newtoniano da applicare al *light-time*, il tempo che impiega un segnale luminoso a percorrere la distanza da una sorgente A (per esempio un'antenna sulla Terra) ad un ricevente B (una sonda interplanetaria). Il calcolo del light-time, anche in formulazione newtoniana, necessita di un processo iterativo perché la luce ha velocità finita e sia la sorgente che il ricevente sono oggetti in movimento. Abbandonando la formulazione newtoniana, si deve tener conto che, se il segnale luminoso si propaga nelle vicinanze di una massa (ad esempio il Sole), la quale, secondo la teoria della relatività generale (RG) di Einstein, incurva lo spazio-tempo, il segnale arriverà *in ritardo* rispetto ad un percorso rettilineo da A a B. Quindi quello che si deve fare è correggere la formula newtoniana

$$t_2 - t_1 = \frac{r_{12}}{c}$$

dove  $r_{12}$  è la distanza tra la sorgente e il ricevente, e  $c$  è la velocità della luce. Nella tesi mostreremo come queste correzioni possano essere fatte utilizzando il formalismo post-Newtoniano ed in particolare studieremo due metodi distinti per il calcolo della correzione del secondo ordine. Analizziamo adesso i contenuti dei singoli capitoli.

Nel primo capitolo vedremo come il problema di calcolo del light-time sia legato al problema di tracking di sonde interplanetarie: infatti, disponendo del tempo di ricezione del segnale dalla Terra si può calcolare il tempo alla sonda e quindi conoscerne la posizione. Nella seconda parte del primo capitolo daremo un cenno sulle teorie metriche della gravità alternative alla RG e spiegheremo l'utilità del formalismo PPN (Parametrized Post-Newtonian) ([Will 1993]).

Nel secondo capitolo introdurremo la formula contenente la correzione del primo ordine al light-time trovata da Shapiro ([Shapiro 1964]) e che è stata utilizzata con successo per più di quaranta anni nelle missioni spaziali. Successivamente ci occuperemo della correzione al secondo ordine, resasi necessaria dall'avvento di strumenti sempre più sensibili: vedremo che tale termine correttivo può essere ricavato in due modi. Per prima cosa analizzeremo la dimostrazione data da Moyer ([Moyer 2003]), basata sulla teoria

delle geodetiche nulle. Ma il punto centrale di questa tesi sarà la dimostrazione data da Ashby-Bertotti ([Ashby and Bertotti 2010]), la quale offre un modo per andare avanti con le approssimazioni; il light-time, infatti, sarà scritto come una serie di potenze e l'approssimazione all'ordine  $k$  sarà data dalla serie troncata al  $k$ -esimo termine. Tale dimostrazione si basa sull'ottica geometrica, sul principio di Fermat e sulla teoria asintotica delle perturbazioni.

Nell'ultimo capitolo esamineremo un esempio concreto di calcolo del light-time, analizzando questo aspetto per l'esperimento di radio scienza della missione BepiColombo ([Tommei et al. 2010]). Spiegheremo brevemente cos'è questa missione e come le formule trovate nel capitolo 2 possano essere usate per ottenere con grande accuratezza la posizione della sonda attorno a Mercurio.

## Riferimenti bibliografici

- [Ashby and Bertotti 2010] Ashby, N., Bertotti, B.: Accurate light-time correction due to a gravitating mass, *Class. Quantum Grav.*, 27 (2010)
- [Moyer 2003] Moyer, T.D.: *Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation*. Wiley-Interscience (2003)
- [Shapiro 1964] Shapiro, I.I.: Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13, 789-791 (1964)
- [Tommei et al. 2010] G. Tommei, A. Milani, D. Vokrouhlický, Light time computations for the Bepicolombo radioscience experiment, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 107, 285–298 (2010)
- [Will 1993] Will, C.M.: *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press (1993)