Il problema di Lambert: un approccio secondo la teoria del controllo ottimo

Elena Bachini

6 novembre 2013

NOTA: Riassunto della tesi di laurea triennale per il corso di studi in Matematica.
Data appello: 2 dicembre 2013 - A.A. 2012/13

Il problema di Lambert, o TPBVP (two-point boundary value problem), è un problema fondamentale nella determinazione delle orbite spaziali. Può essere enunciato in questo modo: dati i vettori posizione iniziale e finale, determinare la velocità iniziale che permette di trasferire il satellite in un tempo di volo specificato.

L'approccio classico per la risoluzione si basa sulla geometria del problema e segue direttamente dal Teorema di Lambert, che dimostra come il tempo di trasferimento non dipenda dall'eccentricità dell'orbita. Questo tipo di soluzione però non può essere direttamente applicato al problema con energia potenziale perturbata, poiché in questo caso cambia la geometria del problema. Sono comunque possibili approcci per cui non si devono apportare modifiche nel caso di perturbazione.

Il principio di Hamilton permette una formulazione alternativa dell'equazione differenziale che descrive il moto del corpo nel problema: la traiettoria tra i due punti specificati in input viene trovata come estremale di un integrale di azione (integrale in cui interviene la Lagrangiana associata al sistema). Il problema di Lambert viene trattato come problema di controllo ottimo in cui l'energia cinetica che compare nella Lagrangiana viene sostituita con un indice di prestazione del controllo iniziale quadratico e la velocità iniziale voluta è proprio il controllo ottimo. La soluzione del problema deriva così dalla soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

Il lavoro è stato organizzato come segue.
Nel Capitolo 1 viene introdotto il problema di Lambert e ne viene fornita una soluzione classica, basata sul teorema di Lambert, secondo la trattazione di Prussing esposta in [1]. Inoltre, viene presentata una soluzione che sfrutta le variabili universali [2], conveniente per un'implementazione numerica. Tale implementazione, con relativi esperimenti numerici, è stata inserita nell'Appendice A.
Nel Capitolo 2 viene studiato il problema riformulato per l'approccio secondo la teoria del controllo ottimo, come affrontato in [3]: partendo dal sistema in questione e dal principio di Hamilton, si riporta il tutto ad un problema di minimizzazione di un funzionale, detto anche indice di prestazione. Dall'esistenza del controllo che garantisce il minimo, il problema si sposta alla soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman associata; questa sarà risolta per mezzo di approssimazioni successive sfruttando i vantaggi dell'espansione in serie con i polinomi di Chebyshev.
Questo algoritmo arriva a una soluzione del problema di Lambert usando le informazioni spettrali associate all'energia potenziale ed è per questo applicabile al caso perturbato senza modifiche. Per completare la trattazione viene presentato un esempio di problema dei due corpi vincolato risolto con il secondo algoritmo, anche in caso di energia perturbata.
In Appendice B sono stati introdotti dei complementi alla trattazione del Capitolo 2: la dimostrazione della convergenza della soluzione nelle approssimazioni per risolvere l'equazione HJB; definizione e relazioni importanti per l'uso dei polinomi di Chebyshev.

Riferimenti bibliografici

[1] Giovanni Mengali. *Meccanica del volo spaziale*. Ed. Plus. 2001

[2] Howard D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier. 2010

[3] M. Bando, H. Yamakawa. *A New Lambert Algorithm Using the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation*. Kyoto University, Gokasho, Uji, Kyoto 611 - 0011, Japan. 2010

[4] Saridis, G. N. and Lee, C.-S. G. *An Approximation Theory of Optimal Control for Trainable Manipulators.* IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 9, No. 3, 1979, pp. 152-159.

[5] Boyd, J. P., Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Courier Dover Publications, 2001, pp. 19-80.