Introduzione

Nel 1987 Devaney provò a definire il concetto di caos nei sistemi dinamici discreti, osservando che in alcuni di essi comparivano simultaneamente tre aspetti: imprevedibilità, impossibilità da parte del sistema di decomporsi in sotto sistemi (sottoinsiemi aperti invarianti) e regolarità.
Riconoscere l'andamento caotico di una mappa non è facile e, in questa tesi, oltre ad approfondire il concetto stesso di caos, studieremo alcuni risultati e strumenti per farlo.
Nel Capitolo 1 introdurremo la dinamica simbolica che è un valido strumento per codificare i sistemi dinamici discreti. Descriveremo infatti l'orbita di un punto qualsiasi come una sequenza indicizzata a partire da zero. Per far questo partizioneremo lo spazio in cui si muove il punto ed etichetteremo ciascun sottoinsieme con un numero scelto da un alfabeto numerico precedentemente fissato. Ad ogni iterata del punto dato assoceremo quindi l'etichetta del sottoinsieme in cui si trova, ottenendo così una stringa. Verrà naturale considerare lo spazio costituito dalle sequenze sopra descritte, munirlo di una metrica e di una topologia indotta.
Così facendo avremo gettato le basi per introdurre la *shift map*, una funzione tanto semplice quanto potente; semplice perché consiste nell'elidere la prima cifra di ogni stringa, potente perché scopriremo essere una mappa caotica che aiuterà a dedurre la caoticità di altri sistemi dinamici discreti.
Nel Capitolo 2 proveremo a comprendere perché la shift map possa aiutarci nell'identificare una funzione caotica.
A tale scopo introdurremo il concetto di coniugazione topologica e mostreremo che due funzioni topologicamente coniugate sono necessariamente uguali per quanto riguarda l'aspetto di regolarità e di non decomponibilità. L'aspetto di imprevedibilità seguirà dalle altre due caratteristiche in presenza di spazi topologici compatti o di spazi infiniti.
Quindi, se vogliamo mostrare che una funzione è caotica, possiamo verificare che sia topologicamente coniugata alla *shift map* e che agisca su spazi compatti o infiniti. È proprio questa la tecnica che useremo nel Capitolo 3 per mostrare come la funzione logistica in alcuni casi sia caotica.
La mappa logistica, $L_r(x) = rx(1-x)$, è stata introdotta dal biologo Robert M. May nel 1976 e permette di descrivere l'andamento di crescita e decrescita di una popolazione. La variazione del parametro naturale r, chiamato tasso di crescita, dà alla mappa caratteristiche differenti.
Restringendoci all'intervallo $[0,1]$, analizzeremo nel dettaglio cosa succede per $r > 2+\sqrt{5}$ e $r = 4$ e concluderemo che, in entrambi i casi, il sistema dinamico discreto è caotico. In realtà questo succede per $r \geq 4$, ma la dimostrazione per $4 < r \leq 2+\sqrt{5}$ non utilizza la dinamica simbolica e per tanto non la tratteremo nella tesi.

Tornando alla caoticità per $r > 2 + \sqrt{5}$, porremo l'attenzione sul fatto che l'immagine di tale funzione non è interamente contenuta nell'intervallo $[0, 1]$ e studiando i punti le cui iterate vi appartengono, scopriremo che questi formano un insieme di Cantor. Questa osservazione risulterà fondamentale nel dimostrare la coniugazione topologica di $L_r(x)$ con la *shift map.*
Tale coniugazione risulta più difficile nel caso in cui r sia uguale a 4. Per tanto, per dimostrare il suo andamento caotico, utilizzeremo una strada leggermente diversa. Mostreremo infatti, dopo aver introdotto la mappa tenda, come questa sia topologicamente coniugata a $L_4(x)$ e, a questo punto, come la mappa tenda lo sia rispetto alla *shift map.*