Biforcazioni in Sistemi Dinamici

Candidato: Alessia Vanni

Relatore: Dott. Giacomo Tommei

Sessione di Laurea: 18 Luglio 2014

Quando si studia un sistema dinamico, una delle priorità è trovarne i punti di equilibrio e le soluzioni periodiche per discuterne la stabilità. Se le equazioni che definiscono il moto dipendono da un parametro reale μ, anche la posizione e la stabilità delle soluzioni sono subordinate al valore di μ. Si ha un fenomeno di *biforcazione* se esiste un valore del parametro per il quale la soluzione cambia comportamento.

In questa tesi verrà analizzato in dettaglio come la variazione di μ determina il cambiamento qualitativo della soluzione e quali sono questi cambiamenti. I concetti di base relativi ai sistemi dinamici e alle equazioni differenziali che sono necessari per la comprensione di tale analisi sono richiamati nel primo capitolo.

Nel secondo vedremo invece i casi di biforcazione relativi a sistemi dinamici smooth, e saranno separati i casi che coinvolgono soluzioni di equilibrio stazionarie e soluzioni periodiche. Per determinare la stabilità di quest'ultime è infatti necessario introdurre le mappe di Poincaré e la teoria di Floquet. Grazie alla mappa di Poincaré siamo in grado associare ad ogni ciclo limite un punto, in modo da ricondurre lo studio della stabilità al caso stazionario. La teoria di Floquet mira invece ad esprimere la perturbazione di un'orbita periodica nella *forma normale*

$$\mathbf{v} = \zeta(t)e^{tR}\mathbf{v}_0 \quad R \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

il cui andamento asintotico è determinato dagli n autovalori della matrice R. Tutti i tipi di biforcazione introdotti sono affiancati da esempi numerici e da uno schema che riassume la posizione e la stabilità di ogni soluzione in funzione di μ.

Nel terzo capitolo infine esamineremo due esempi di sistemi dinamici non-smooth, che non possono essere trattati direttamente con la teoria dei capitoli precedenti. Il primo esempio è un caso stazionario che presenta un fenomeno di biforcazione quando μ raggiunge il valore μ_0 per cui la matrice jacobiana $J(\mathbf{x}_e, \mu)$ (dove $\mathbf{x}_e$ è la soluzione di equilibrio) non è definita. Poiché $J(\mathbf{x}_e, \mu)$ è costante a tratti per ogni $\mu \neq \mu_0$, nell'intorno del valore critico è possibile sostituire $J(\mathbf{x}_e, \mu)$ con un segmento incluso nello spazio delle matrici. Grazie a tale approssimazione sarà possibile determinare il cambiamento qualitativo della soluzione. Il secondo esempio è costituito dal Woodpecker Toy un sistema con impatto e frizione studiato da Pfeiffer e Glocker ([Pfeiffer, Glocker 1996]) , che consiste in una sagoma di legno (a forma di picchio) collegata da una molla ad un manicotto di legno. Quest'ultimo è posto infine attorno ad un'asta verticale poco più stretta, in modo che un eventuale movimento del picchio lo faccia oscillare, provocandone lo scivolamento lungo l'asta. Lo studio della stabilità è stato eseguito da Leine e Van Campen ([Leine, Van Campen 2006]) costruendo numericamente la mappa di Poincaré per 94 valori del parametro. Poiché la mappa risente dell'irregolarità del moto, risulta discontinua in vari punti e ciò produce un fenomeno di biforcazione non osservabile nel caso smooth. La tesi si conclude con l'osservazione di tale fenomeno, riprodotto su una funzione lineare e continua a tratti, che approssima la mappa di Poincaré del sistema in un intorno della soluzione.

Riferimenti Bibliografici

[Pfeiffer, Glocker 1996] Pfeiffer, F., Glocker, Ch., 1996. Multybody Dynamics with Unilateral Contacts. Wiley, New York.

[Leine, Van Campen 2006] Leine, R.I., Van Campen, D.H., 2006. Bifurcation Phenomena in Non-smooth Dynamical Systems.

[Glocker 2001] Glocker, Ch., 2001. Set-Valued Force Laws, Dynamics of Non-Smooth Systems.

[Rosso 2013] R. Rosso. Dispense del corso di Fisica Matematica (a.a. 2013/2014).

[Riganti et al. 2000] Biforcazioni e caos nei modelli matematici delle scienze applicate, di Riccardo Riganti, Levrotto & Bella, 2000.