Un approccio variazionale alla meccanica celeste: il PCR3BP e il problema dei 4 corpi.

Alessio Aristodemo

18 Luglio 2014

Abstract

Lo studio dei fenomeni che evolvono nel tempo come l'oscillare di un pendolo, il moto dei corpi celesti, le dinamiche molecolari, finanche il variare degli indicatori di mercato, è spesso portato avanti modellando tali fenomeni come sistemi dinamici. La formulazione matematica che descrive l'evoluzione dei sistemi dinamici richiede generalmente la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali.
Risolvere un sistema fisico significa determinarne l'evoluzione nel tempo a partire da un insieme di condizioni iniziali; ad esempio, nel caso di sistemi meccanici, attraverso una legge matematica che ne determini la posizione e la velocità in funzione del tempo. Spesso tuttavia, le equazioni che governano il moto non sono risolvibili per via analitica e si ricorre pertanto a tecniche di integrazione numerica al fine di ottenere un'approssimazione accurata della soluzione.
Un approccio differente, motivato dalla formulazione lagrangiana della meccanica classica, può essere quello di trattare il problema dello studio di un sistema fisico da un punto di vista variazionale: piuttosto che discretizzare direttamente le equazioni del moto, è possibile utilizzare un metodo di quadratura per approssimare l'integrale di azione e derivare così una discretizzazione delle equazioni di Eulero-Lagrange che sappiamo essere equivalenti alla seconda legge di Newton. Gli integratori numerici che derivano da un simile approccio sono detti, appunto, integratori variazionali. Essi appartengono ad una classe più ampia di algoritmi: gli integratori geometrici. Un integratore geometrico ha la peculiarità di preservare la geometria (in particolare le simmetrie) di cui gode il sistema. Ciò che ne risulta è una riproduzione del moto qualitativamente accurata anche per intervalli di tempo molto grandi.
In questa tesi discuteremo come derivare gli integratori variazionali e dimostreremo le loro proprietà di accuratezza per poi darne applicazione in due problemi di meccanica celeste.
Nel primo capitolo forniremo una breve trattazione della meccanica lagrangiana continua per poi derivarne l'analoga formulazione discreta fino a dedurre una discretizzazione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Seguiremo in tal senso il lavoro di Marsden e West [3] e ci soffermeremo in particolare sull'importanza che il Teorema di Noether assume nel caso discreto: esso ci assicura che la strada

variazionale che stiamo perseguendo ci permetterà di dedurre degli algoritmi che preservino le simmetrie del problema originario durante il calcolo.
Nel secondo capitolo motiveremo l'impiego degli integratori variazionali ed in generale di schemi numerici che siano in qualche modo conservativi. L'esempio elementare del pendolo ci guiderà in tal senso e vedremo come una particolare proprietà, l'essere simplettico, conferisca ad un dato algoritmo delle proprietà di accuratezza qualitativa che i comuni integratori numerici non possiedono. Nell'ultima parte del capitolo adatteremo le equazioni discrete di Eulero-Lagrange in modo da derivarne un algoritmo di integrazione numerica effettivamente implementabile e daremo dimostrazione della simpletticità dello schema numerico così ottenuto.
Nel terzo ed ultimo capitolo, infine, applicheremo gli algoritmi variazionali allo studio del problema dei tre corpi ristretto circolare (PCR3BP) ed del problema dei 4 corpi semplificato (Sole-Giove-Saturno-Urano) confrontando i risultati ottenuti con dei metodi di Runge-Kutta, tra i più utilizzati nella risoluzione di equazioni differenziali.

Bibliografia

[1] A. Milani Comparetti. *Introduzione ai sistemi dinamici*. Edizioni Plus, 2009.

[2] I.M. Gelfand, S.V. Fomin *Calculus of Variations*. Dover Publications, 2003.

[3] J.E. Marsden, M. West *Discrete Mechanics and Variational Integrators*. Acta Numerica 10, 2001

[4] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3^{rd} edition, 2002