SOLUZIONI UNIVERSALI PER IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Candidato: Andrea Cirino
Relatore: Dott. Giacomo Tommei

Anno Accademico 2014-2015

Il moto di due corpi puntiformi di masse m_1 e m_2, soggetti esclusivamente alla mutua interazione gravitazionale, è descritto da una coppia di equazioni vettoriali differenziali non lineari e da un insieme di condizioni inziali come le posizioni e le velocità dei due corpi in un preciso instante di tempo. Calcolare le posizioni e velocità negli istanti successivi rappresenta il problema dei due corpi.
Sia dato un sistema di riferimento inerziale fisso Σ e supponiamo che i due corpi siano individuati dai vettori posizione $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$. Indichiamo con $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ il vettore posizione relativa dei due corpi e con $\mu = G\,(m_1 + m_2)$ la massa totale del sistema moltiplicata per la costante di gravitazione G. Risolvere il problema dei due corpi vuol dire determinare il moto relativo dei due corpi, ovvero trovare le soluzioni dell'Equazione Fondamentale del Moto

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Newton e Keplero, nei loro lavori, hanno dimostrato che il moto avviene in un piano e le orbite sono coniche.
Nella trattazione classica del problema, che verrà discussa in appendice, i vari tipi di orbita sono trattati separatamente: a seconda che la traiettoria sia parabolica, ellittica o iperbolica dobbiamo ricorrere a variabili ed equazioni diverse.
L'obiettivo di questa tesi è presentare delle soluzioni che siano valide per tutte le orbite assunte dai corpi. I metodi presentati forniranno delle soluzioni esatte, che potranno essere efficientemente implementate in simulazioni numeriche.
Nel primo capitolo introdurremo i concetti fondamentali della teoria, sviluppando parallelamente la prima soluzione universale descritta in [1]: con la trasformazione di Sundman troveremo un'equazione del moto lineare, che risolveremo introducendo una famiglia di Funzioni Universali; le funzioni di Lagrange e l'equazione di Keplero ci permetteranno di

ricavare la traiettoria del moto e la posizione dei corpi in ogni istante di tempo.
Nel secondo capitolo, partendo dall'equazione lineare del moto, presenteremo una soluzione più moderna, descritta in [2]. Osserveremo che tale soluzione, puramente reale nonostante utilizzi il campo complesso, è analiticamente e numericamente equivalente alle precedenti. Nello studio delle sue applicazioni, quali l'integrazione numerica e il metodo della variazione dei parametri, analizzeremo i vantaggi rispetto alla formulazione del primo capitolo.

Riferimenti bibliografici

[1] Battin R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1987.

[2] Henderson T. A., Junkins J. L. e Radice G., *A complex exponential solution to the unified two-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 104, pp.355-368, Springer, 2009.