Sistemi Integrabili e Variabili di Delaunay

Candidata: Murgia Sofia

Sessione di Laurea: 30 Gennaio 2015

Nello studio dei sistemi dinamici un problema cruciale è quello dell'integrabilità, ovvero la possibilità di scrivere esplicitamente il flusso. Potremmo definire integrabile un sistema che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali, ma questa definizione non darebbe nessuna informazione riguardo alla capacità effettiva di scrivere il flusso in modo esplicito. Tradizionalmente si parla di integrabilità per quadrature quando la soluzione può essere scritta in una forma che richiede un numero finito di operazioni algebriche, comprese l'inversione di funzioni e il calcolo di integrali di funzioni note (quadrature).

In questo lavoro di tesi, che tratta appunto di integrabilità, adotteremo un formalismo hamiltoniano; è per questo che nel primo capitolo richiameremo i concetti fondamentali che serviranno nel corso della trattazione, quali le equazioni della dinamica, le trasformazioni canoniche, i metodi pratici per riconoscere che una data trasformazione sia canonica, oppure per costruirne una che automaticamente lo sia.

Nel secondo capitolo porremo l'attenzione sui sistemi integrabili e getteremo le basi per la dimostrazione del teorema di Liouville, risultato classico secondo cui, assegnato un sistema dinamico ad n gradi di libertà, la conoscenza di n integrali primi in involuzione assicura l'integrabilità per quadrature. Il teorema di Liouville mette a disposizione un metodo efficace di integrazione, ma la forma delle soluzioni che se ne ricava non dà molte informazioni sugli aspetti qualitativi della dinamica. In particolare non è immediatamente evidente la presenza di comportamenti periodici. Per mettere in evidenza la periodicità applicheremo opportune trasformazioni canoniche in modo da ottenere delle coordinate grazie alle quali il moto apparirà particolarmente semplice. Per prima cosa studieremo un sistema con solo un grado di libertà: il primo cambio di coordinate che faremo servirà per ottenere le variabili che rappresentano l'energia e il tempo del sistema, poi, se il sistema presenta delle periodicità, quozienteremo il tempo per il gruppo dei periodi ottenendo degli pseudo-angoli (non sono angoli veri e propri perché in generale i periodi non sono costanti). Una successiva trasformazione introdurrà come coordinate le azioni (se l'orbita è una curva chiusa rappresentano l'area racchiusa in tale curva) e gli angoli, ovvero gli pseudo-angoli considerati precedentemente in cui il periodo è portato ad essere costante. Grazie al teorema di Arnold-Jost vedremo che questo ragionamento è applicabile anche quando il sistema ha n gradi di libertà, e che tutte le trasformazioni considerate sono canoniche. Inoltre dimostreremo che ogni componente connessa della varietà definita dalle superfici di livello degli integrali primi è diffeomorfa al toro $\mathbb{T}^n$ se è compatta, altrimenti al cilindro $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, per un certo k da 0 a n. L'interesse per le variabili azione-angolo è giustificato anche dall'importanza che assumono nello sviluppo della teoria dei sistemi quasi integrabili, ovvero dei sistemi integrabili sui quali viene applicata una piccola perturbazione.

Nell'ultimo capitolo presenteremo un'applicazione del teorema di Arnold-Jost, ovvero mostreremo un calcolo esplicito delle variabili azione-angolo nel caso del problema dei due corpi gravitazionale. Tale calcolo sarà eseguito facendo uso esplicito degli elementi orbitali, in modo che le variabili ottenute, chiamate variabili di Delaunay, risultino strettamente vincolate ai parametri orbitali. Quest'ultima applicazione si basa su vari risultati relativi al problema dei due corpi: è stata dunque predisposta un'appendice che riassume brevemente i risultati utili per la lettura del lavoro. Sempre nell'appendice sono presenti dei risultati utili nella dimostrazione del teorema di Arnold Jost.