Equazione di HJB per il controllo del caos: caso dell'attrattore di Rössler. Abstract

Stefania Lisai

5 dicembre 2014

Il concetto di *caos* risale agli anni 1880-1890, quando Henri Poincaré, studiando il problema dei tre corpi, notò l'esistenza di orbite non periodiche, che non tendevano a punti di equilibrio o a cicli limite, nè all'infinito [15]. Tra i tanti studiosi che contribuirono allo sviluppo della teoria del caos, Lorenz ebbe un ruolo fondamentale: nel 1961, mentre lavorava a simulazioni nel campo della meteorologia, notò che due calcolatori con una diversa approssimazione di macchina fornivano risultati estremamente diversi, nonostante ricevessero gli stessi dati in input [9]. Aveva quindi avuto modo di osservare una di quelle che sarebbero state poi considerate le caratteristiche di un sistema caotico, e aveva dimostrato che, per quanto sia preciso e dettagliato il modello meteorologico, non è possibile fare precise previsioni a lungo termine.
Negli anni, anche grazie alla disponibilità di computer sempre più potenti, la teoria del caos è diventata oggetto di ricerca di molte discipline, quali matematica, topologia, fisica, sistemi sociali, modelli di crescita demografica, biologia, meteorologia, astrofisica, teoria dell'informazione, neuroscienze, e tante altre.
Per le loro caratteristiche, principalmente l'alta sensibilità alla variazione di dati iniziali, i sistemi caotici sono prevedibili per periodi di tempo molto brevi, dunque si sono cercati dei metodi per *controllare* il comportamento caotico, senza alterare la natura del sistema. Questo può essere fatto in vari modi, generalmente con l'introduzione nel sistema di variabili di controllo per stabilizzare le orbite (come nel caso del metodo OGY [11]), per deviarle verso un punto fissato (vedremo il metodo dell'equazione di HJB), o per raggiungere altri obiettivi in base al risultato che si vuole ottenere.

Lo scopo di questo elaborato è esporre un particolare metodo, presentato in [16], per controllare i sistemi caotici utilizzando i risultati della programmazione dinamica, concentrandoci sull'applicazione del metodo al caso più semplice di attrattore strano continuo, l'attrattore di Rössler [17].
Nel primo capitolo vedremo qualche richiamo di teoria del controllo ottimo, in particolare nell'ambito della programmazione dinamica, sviluppata da Bellman [2], che consiste nell'analisi di un problema di controllo ottimo attraverso lo studio di una funzione scalare, la funzione valore. Vedremo qualche condizione necessaria che questa funzione deve

soddisfare, tra le quali una PDE, l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Infine vedremo in quali casi l'equazione di HJB è una condizione sufficiente, e presenteremo il problema di controllo ottimo nonlineare quadratico a orizzonte illimitato, caso particolare che ci servirà nel capitolo successivo.
Il secondo capitolo è diviso orientativamente in due parti: inizieremo con una breve introduzione sulla teoria del caos, definiremo il concetto di attrattore e di attrattore strano, e vedremo qualche esempio, sia continuo che discreto, per capire come si evolve il flusso, in cui le orbite si allontanano esponenzialmente tra loro, ma rimangono racchiuse in una regione di spazio limitata. Studieremo infine le proprietà principali del sistema di Rössler, quali punti di equilibrio e comportamento delle traiettorie con un approccio visivo, come esposto in [1]. La seconda parte del capitolo riguarda il controllo del caos: vedremo brevemente un metodo che ha lo scopo di stabilizzare le orbite periodiche instabili di un sistema caotico, per poi concentrarci sul metodo dell'equazione di HJB applicato all'attrattore di Rössler.
Segue una breve appendice in cui si richiamano definizioni e risultati di Analisi Matematica e Teoria dei Sistemi Dinamici, utili per la comprensione dell'elaborato.

.

Riferimenti bibliografici

[1] R. H. Abraham and C.D. Shaw. *Dynamics: the Geometry of Behavior. Part 2: Chaotic Behavior.* Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1983.

[2] R. Bellman. *Dynamic programming.* Princeton University Press, 1957.

[3] Andrea Calogero. Appunti di calcolo delle variazioni e controllo ottimo. Teoria, modelli economici, esercizi e cenni di controllo ottimo stocastico, 2013.

[4] W. L. Ditto et al. Experimental Control of Chaos. (65):3211, 1990.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[6] A. Garfinkel et al. Controlling Cardiac Chaos. (257):1230, 1992.

[7] Z. Gills et al. Tracking Unstable Steady States: Extending the Stability Regime of a Multimode Laser System. (69):3169, 1992.

[8] Christophe Letellier and Otto E. Rössler. Rössler attractor, 2006.

[9] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. 20(2):130–141, 1963.

[10] John W. Milnor. Attractor, 2006.

[11] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke. Controlling Chaos. (64):1196, 1990.

[12] Edward Ott. Controlling Chaos, 2006.

[13] V. Petrov et al. Controlling Chaos in the Belousov-Zhabotinsky Reaction. (361):240, 1994.

[14] D. Pierson et al. Detecting Unstable Points in Noisy Chaotic and Limit Cycle Attractors with Application to Biology. (75):2124, 1995.

[15] Jules Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Divergence des séries de M. Lindstedt. (13):1–270, 1890.

[16] Marat Rafikov and José Manoel Balthazar. On an optimal control design for Rössler system. (333):241–245, 2004.

[17] Otto E. Rössler. An equation for continuous chaos. 57(5):397–398, 1976.

[18] Otto E. Rössler. Chaotic behavior in simple reaction system. (31 A):259–264, 1976.

[19] P. So et al. Extracting Unstable Periodic Orbits from Chaotic Time Series. (55):5398.

[20] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos. With applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Westview Press, 2000.

[21] Wikipedia. Chaos theory.

[22] Wikipedia. Control of Chaos.

[23] Wikipedia. Rössler Attractor.