Tesi di Laurea Triennale

# Teoria della regolarizzazione e quaternioni

Anno Accademico 2013/2014

## Abstract

Questa tesi è divisa in tre parti: la prima si occupa di introdurre il lettore alla teoria della regolarizzazione, la seconda dà le prime definizioni e proprietà riguardanti la struttura algebrica dei quaternioni e la terza presenta l'applicazione della suddetta struttura algebrica al fine di rielaborare la teoria introdotta.

La teoria della regolarizzazione è uno strumento matematico che intende studiare l'equazione del moto di quei corpi celesti che nel loro tragitto arrivano a collidere con altri corpi. Come possiamo vedere dalla legge di Newton che regola la mutua attrazione fra due masse $m$ e $M$ a distanza $r$ la collisione corrisponde ad una singolarità dell'equazione in quanto è determinata dal tendere a zero di $r$. Per questo, al momento della collisione l'equazione non è né analiticamente né numericamente trattabile. La teoria della regolarizzazione si pone allora come obiettivo quello di linearizzarla, ovvero di trasformarla da equazione *singolare* in equazione *regolare*. Alcuni esempi di questa teoria, trattati per esteso nel capitolo 1, sono quelli della regolarizzazione del moto kepleriano in una, due o tre dimensioni nei casi con e senza perturbazione. Nel primo capitolo siamo partiti infatti dalla descrizione e regolarizzazione del moto limitato a muoversi su una linea retta, per poi estendere l'analisi al caso piano e a quello spaziale. In particolare, le trasformazioni che caratterizzano queste regolarizzazioni sono la trasformazione di Levi Civita del 1920, ovvero la

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}^2 \tag{1}$$

dove $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ sono variabili reali nel caso uno dimensionale e variabili complesse nel caso bidimensionale, e la trasformazione di Kunstaanheimo-Stiefel del 1964 definita per il caso in tre dimensioni usando variabili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^4$ .

Osserviamo che le variabili usate nel caso del moto nel piano sono di natura complessa, quindi fanno riferimento ad uno spazio parametrico in due dimensioni. Nel caso spaziale ne sono richieste invece altre due, e cioè è richiesto $\mathbb{R}^4$ come spazio dei parametri. Ed è in questo contesto che i quaternioni fanno il loro ingresso, essendo una struttura il cui spazio parametrico è proprio quello. Ma prima di capire tutte le potenzialità di questo strumento facciamo qualche altro appunto generale sulla procedura della regolarizzazione.

Essa si sviluppa, nei tre esempi citati, sempre con la stessa struttura, ovvero seguendo tre passaggi: in primis si applicano le trasformazioni appena definite passando dalle variabili fisiche a quelle parametriche, poi si introduce il *tempo fittizio* che permette di vedere le equazioni del moto come rallentate; infine, per

concludere, si usa la conservazione dell'energia ottenendo un'equazione lineare: l'equazione dell'oscillatore armonico in una, in due o in quattro dimensioni.

Le trasformazioni di Levi-Civita e di KS, descritte ed usate in questo lavoro al fine di regolarizzare il moto nel caso del problema dei due corpi, sono però estendibili senza grosse variazioni al problema dei tre corpi ristretto circolare. In tale contesto, le stesse vengono definite trasformazioni *locali* in quanto si limitano a regolarizzare la collisione dell'oggetto di massa trascurabile con uno solo dei due primari. Al contrario, è detta *globale* quella trasformazione che regolarizza simultaneamente la collisione con entrambi i primari. Ne è un esempio, analizzato alla fine del capitolo 2 di questo lavoro, quello che utilizza la trasformazione di Birkhoff.

Il resto di questo lavoro tratta, attraverso tre esempi, l'applicazione della struttura dei quaternioni $\mathbf{U}$ alla teoria appena introdotta. Seguendo il lavoro di Joerg Waldvogel abbiamo infatti definito in $\mathbf{U}$ lo star coniugato, che ci ha permesso di rivisitare la regolarizzazione di KS vedendola come una più fedele estensione di quella di Levi-Civita. Infatti in analogia con la (1) si definisce

$$\mathbf{u} \to \mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^* \tag{2}$$

dove ora $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ sono quaternioni. Inoltre è stato possibile rielaborare il caso perturbativo e la trasformazione di Birkhoff, una volta riscritta in termini geometrici. Nel capitolo 4 abbiamo quindi fornito tre esempi dell'applicazione di questa struttura algebrica astratta, i quaternioni, ad un problema molto concreto. La teoria della regolarizzazione sviluppatasi nell'ultimo secolo, permette infatti di risolvere molti problemi attuali: è possibile, ad esempio, studiare le equazioni dei veicoli spaziali artificiali sopperendo al problema della "near collision" cioè al fatto che l'equazione del moto di uno di questi oggetti presenta, al decollo e all'atterraggio, le singolarità di cui abbiamo tanto parlato.

Altri esempi in cui la teoria della regolarizzazione si rende necessaria sono la collisione, la cui esistenza è ormai comunemente accettata, avvenuta più di 65 milioni di anni fa tra la terra e un grande meteorite che causò l'estinzione di gran parte della fauna presente, fra cui i dinosauri. O anche la caduta della cometa Shoemaker-Levy 9 su Giove, che è diventata famosa in quanto la prima ad essere osservata. Insomma, la teoria della regolarizzazione si pone alla base della risoluzione di molti problemi che nella meccanica celeste classica non era possibile, né forse necessario, studiare.

La tesi si conclude con l'appendice dove, oltre ad una serie di risultati a cui si è accennato senza maggiori spiegazioni nel resto del lavoro, si offre in linee generali un'altra applicazione dei quaternioni: la rotazione di vettori di $\mathbb{R}^3$ intorno ad un asse fissato.