Soluzione Settimo Compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 21/02/2020

Esercizio 1

1) Nel sistema S agiscono solo le forze reali, mentre nel sistema S' compare la forza apparente dovuta alla non inerzialità di S', che è in moto uniformemente accelerato. Le forze reali agenti sulla massa m sono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione del piano $\vec{R}$, mentre la forza apparente è il prodotto della massa per l'accelerazione di trascinamento cambiata di segno, cioè $-m\vec{A}$. Sul piano inclinato agiscono la sua forza peso $M\vec{g}$, la reazione del pavimento $\vec{R}_P$, la reazione della massa m sul piano, che per il principio di azione e reazione è $-\vec{R}$, e la forza esterna $\vec{F}$. Si noti che se si considera il sistema piano+massa le forze peso, la forza $\vec{F}$ e la reazione del pavimento $\vec{R}_P$ sono forze esterne, mentre $\vec{R}$ è una forza interna. È importante osservare fin da adesso che la reazione $\vec{R}$ è ortogonale alla direzione istantanea del piano, che varia nel tempo, per cui è perpendicolare allo spostamento del corpo m solo nel sistema S' ma non nel sistema S.

2) Poiché il corpo di massa m è a contatto con il piano inclinato, nel sistema S' l'accelerazione è diretta lungo l'asse $\hat{x}'$ e non c'è moto lungo l'asse $\hat{y}'$, per cui:

$$\vec{a}' = a'\hat{x}' \tag{1}$$

con a' da determinare. Inoltre, come già osservato, la reazione $\vec{R}$ in S' è ortogonale al moto e quindi è diretta lungo $\hat{y}'$. L'equazione del moto di m nel sistema S' è:

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{A} \tag{2}$$

che, proiettando sugli assi $\hat{x}'$e $\hat{y}'$, diventa il sistema:

$$\begin{cases} ma' = m\left(\vec{g} - \vec{A}\right) \cdot \hat{x}' \\ 0 = R + m\left(\vec{g} - \vec{A}\right) \cdot \hat{y}' \end{cases} \tag{3}$$

Le proiezioni che compaiono nel sistema (3) si ottengono dall'osservazione della Figura fornita nel testo:

$$\begin{cases} \vec{g} = g(\hat{x}' \sin\theta - \hat{y}' \cos\theta) \\ \vec{A} = A(\hat{x}' \cos\theta + \hat{y}' \sin\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left(\vec{g} - \vec{A}\right) \cdot \hat{x}' = g \sin\theta - A\cos\theta \\ \left(\vec{g} - \vec{A}\right) \cdot \hat{y}' = -(g\cos\theta + A\sin\theta) \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo nel sistema (3) si ottiene:

$$\vec{a}' = \hat{x}'(g\sin\theta - A\cos\theta) = \hat{x}' \frac{g}{2}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = 2.07 \text{ m/s}^2\, \hat{x}' \tag{5a}$$

$$\vec{R} = \hat{y}' m(g\cos\theta + A\sin\theta) = \hat{y}' m \frac{g}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{3}\right) = 20.26 \text{ N}\, \hat{y}' \tag{5b}$$

Per ricavare l'accelerazione $\vec{a}$ nel sistema S dobbiamo utilizzare la formula di trasformazione fra i due sistemi S e S':

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} = (\vec{a}' \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{a}' \cdot \hat{y})\hat{y} + A\hat{x} \tag{6}$$

Poiché $\vec{a}'$ è diretta lungo $\hat{x}'$, per calcolare le proiezioni di $\vec{a}'$ sugli assi del sistema inerziale è sufficiente determinare la scomposizione dell'asse $\hat{x}'$:

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta \;\Longrightarrow (\vec{a}' \cdot \hat{x}) = (g\sin\theta - A\cos\theta)\cos\theta\,; \;\; (\vec{a}' \cdot \hat{y}) = -(g\sin\theta - A\cos\theta)\sin\theta \tag{7}$$

Sostituendo nella (6) si ha:

$$\vec{a} = \hat{x}(g\sin\theta\cos\theta + A\sin^2\theta) + \hat{y}(A\cos\theta\sin\theta - g\sin^2\theta) = g\left(\hat{x}\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{12}\right) + \hat{y}\left(\frac{\sqrt{3}-3}{12}\right)\right) \tag{8}$$

Numericamente si ha quindi:

$$\vec{a} = (5.06\,\hat{x} - 1.04\,\hat{y})\ \mathrm{m/s^2} \tag{9}$$

3) L'espressione di $\vec{R}$ in S' è già stata calcolata nel punto precedente (formula (5b)), per cui per ottenerla nel sistema S è sufficiente determinare la scomposizione del versore $\hat{y}'$ sugli assi del sistema inerziale. Si noti che essendo $\vec{R}$ una forza reale il suo modulo non cambia passando da un sistema di riferimento all'altro; solo la scomposizione sugli assi coordinati cambia da sistema a sistema. Dalla Figura del testo ricaviamo:

$$\hat{y}' = \hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta \tag{10}$$

per cui l'espressione di $\vec{R}$ nel sistema S è:

$$\vec{R} = m(\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta)(g\cos\theta + A\sin\theta) = mg\left(\hat{x}\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{12}\right) + \hat{y}\left(\frac{9+\sqrt{3}}{12}\right)\right) = (10.13\,\hat{x} + 17.55\,\hat{y})\ \mathrm{N} \tag{11}$$

4) Scriviamo l'equazione del moto per il piano inclinato (ovviamente nel sistema S: in S' il piano è fermo !):

$$M\vec{a}_M = \vec{F} - \vec{R} + \vec{R}_P + M\vec{g} \tag{12}$$

dove $\vec{a}_M = \vec{A}$ è l'accelerazione del piano inclinato e come già osservato la forza di reazione del blocco appare con il segno meno a causa del principio di azione e reazione. Poiché $\vec{R}_P$ e $M\vec{g}$ sono dirette verticalmente mentre $\vec{F}$ è diretta orizzontalmente ed il moto del piano inclinato avviene in direzione orizzontale possiamo considerare solo la proiezione della (12) lungo l'asse $\hat{x}$ ottenendo:

$$\vec{F} = \hat{x}\left(MA + \left(\vec{R}\cdot\hat{x}\right)\right) = \hat{x}\left(MA + m(g\sin\theta\cos\theta + A\sin^2\theta)\right) = \hat{x}g\left(\frac{M}{3} + m\left(\frac{3\sqrt{3}+1}{12}\right)\right) \tag{13}$$

Sostituendo i valori numerici si ha infine:

$$\vec{F} = 42.83\,\hat{x}\ \mathrm{N} \tag{14}$$

Esercizio 2

1) Il potenziale $\varphi(P)$ nel punto generico P di coordinate $(0,0,z_P)$ si può scrivere nella forma:

$$\varphi(P) = \varphi_{+2Q\to P} + \varphi_{-Q(A)\to P} + \varphi_{-Q(B)\to P} \tag{15}$$

Essendo il punto P sulla verticale del centro del triangolo, le tre cariche sono equidistanti da esso e:

$$d_{+2Q\to P} = d_{-Q(A)\to P} = d_{-Q(B)\to P} = \sqrt{r^2 + z_P^2} \tag{16}$$

dove r è la distanza comune dei tre vertici del triangolo equilatero dal centro del triangolo stesso. Si ottiene quindi:

$$\varphi(P) = \frac{(+2Q-Q-Q)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z_P^2}} = 0 \tag{17}$$

cioè il potenziale è nullo in tutti i punti dell'asse z. Di conseguenza:

$$\varphi(R) - \varphi(P) = -\int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{18}$$

per qualsiasi coppia di punti giacenti sull'asse z.

2) Dalla (18) non si deve concludere erroneamente che il campo $\vec{E}$ sull'asse z sia nullo: infatti allo stesso risultato si giunge richiedendo che sull'asse z $\vec{E}$ giaccia in un piano a z costante, cioè che sia perpendicolare a z. Il campo $\vec{E}$ deve quindi essere della forma:

$$\vec{E}(0,0,z) = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y \tag{19}$$

Notiamo inoltre che il sistema è simmetrico per scambio di x con $-x$, per cui sull'asse $\hat{z}$ anche la componente x deve essere nulla. L'unica componente che sopravvive è quindi la y. Calcoliamo ora esplicitamente $\vec{E}(0,0,z)$ e verifichiamo la conclusione appena ottenuta.

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(0,0,z) = \vec{E}_{+2Q\to P} + \vec{E}_{-Q(A)\to P} + \vec{E}_{-Q(B)\to P} \tag{20}$$

Scriviamo i tre contributi separatamente, sfruttando il fatto che le componenti di ciascun campo si ottengono calcolando il vettore che collega il singolo vertice con P e dividendo per il suo modulo, che è proprio la distanza (16). Si ottiene allora:

$$\vec{E}_{+2Q\to P} = \frac{+2Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)} \frac{(0,0,z_P)-\left(0,a\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)}{\sqrt{r^2+z_P^2}} = \frac{+Q}{2\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{3/2}}\left(-a\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{y} + z_P\hat{z}\right) \tag{21a}$$

$$\vec{E}_{-Q(A)\to P} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)} \frac{(0,0,z_P)-\left(-\frac{a}{2},-a\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)}{\sqrt{r^2+z_P^2}} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{3/2}}\left(+\frac{a}{2}\hat{x} + a\frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + z_P\hat{z}\right) \tag{21b}$$

$$\vec{E}_{-Q(B)\to P} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)} \frac{(0,0,z_P)-\left(+\frac{a}{2},-a\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)}{\sqrt{r^2+z_P^2}} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{3/2}}\left(-\frac{a}{2}\hat{x} + a\frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + z_P\hat{z}\right) \tag{21c}$$

Sommando le tre equazioni (21) si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{E}(P) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{\frac{3}{2}}}\left[2Q\left(-a\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{y} + z\hat{z}\right) - Q\left(+\frac{a}{2}\hat{x} + a\frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + z\hat{z} - \frac{a}{2}\hat{x} + a\frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + z\hat{z}\right)\right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\hat{x}a\left(+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \hat{y}a\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \hat{z}z(2-1-1)\right] = \frac{-Qa\hat{y}\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z_P^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{22}$$

che conferma la conclusione precedente: il campo ha la sola componente $\hat{y}$ e tale componente è negativa.

3) Chiamiamo M il punto medio del lato AB; le coordinate di M sono $\left(0,-a\sqrt{3}/6,0\right)$.) La carica $+2Q$ è soggetta alla forza elettrostatica dovuta alle due cariche negative mantenute in posizioni fisse, che per simmetria è diretta lungo l'asse $\hat{y}$. Poiché l'unica forza agente sulla carica positiva è quella elettrostatica il sistema è conservativo e si può applicare il principio di conservazione dell'energia, tenendo conto del fatto che la carica parte con velocità iniziale nulla dal vertice C, che dista $a\sqrt{3}/2$ da M. L'energia potenziale della carica $+2Q$ nei punti C e M è dovuta alla sovrapposizione dei potenziali φ generati in questi due punti dalle due cariche negative; pertanto:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = 0 + 2Q\varphi(C) = E_{fin} = K_{fin} + U_{fin} = \frac{m}{2}V_f^2 + 2Q\varphi(M) \Longrightarrow V_f = 2\sqrt{\frac{Q\left(\varphi(C)-\varphi(M)\right)}{m}} \tag{23}$$

I due potenziali valgono rispettivamente:

$$\varphi(M) = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\frac{a}{2}} = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}; \qquad \varphi(C) = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a} \quad \Longrightarrow \varphi(C) - \varphi(M) = +\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a} \tag{24}$$

In conclusione:

$$V_f = 2\sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}} = \sqrt{\frac{2Q^2}{\pi\varepsilon_0 am}} \tag{25}$$

4) Nel percorso da C a M la carica $+2Q$ viene accelerata nel verso delle $\hat{y}$ negative, mentre una volta superato il punto M viene accelerata nel verso delle $\hat{y}$ positive; la sua velocità quindi aumenta da C a M, dove raggiunge il suo valore massimo dato dalla (25), e diminuisce dopo il punto M fino ad annullarsi, per la conservazione dell'energia, in un punto N simmetrico di C rispetto a M. Il punto N ed il punto C sono infatti equidistanti dalla coppia delle cariche negative, per cui sono allo stesso potenziale; conseguentemente l'energia potenziale della carica $+2Q$ ha lo stesso valore in C e N e quindi anche l'energia cinetica deve avere lo stesso valore nei due punti: poiché $\varphi(C) = 0$ si ha anche $\varphi(N) = 0$. Raggiunto il punto N con velocità nulla la carica viene attirata all'indietro verso il punto M ed il moto si inverte. Poiché la forza agente sulla carica non è proporzionale allo spostamento da un punto stazionario, per es. M, ma segue una legge più complessa, il moto non è armonico. In conclusione il moto della carica $+2Q$ è periodico non armonico (opzione d)).