

**Esercizio 1**

1) Sul cilindro agiscono:

- a) la forza di tensione  $\vec{T}$  della fune, applicata nel punto di contatto fra la fune ed il bordo del cilindro, in direzione orizzontale e orientata verso destra;
- b) la forza peso  $M\vec{g}$ , applicata nel centro di massa, in direzione verticale e orientata verso il basso;
- c) le reazioni vincolari  $\vec{\mathcal{R}}_1$  e  $\vec{\mathcal{R}}_2$  dei due supporti, in direzione verticale e orientate verso l'alto;
- d) le forze di attrito statico (il cilindro è per ipotesi in moto di puro rotolamento)  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  dei due supporti, in direzione orizzontale e orientate in un verso da precisare.

Sul corpo di massa  $m$  agiscono:

- a) la forza peso  $m\vec{g}$  in direzione verticale e orientata verso il basso;
- b) la forza di tensione  $\vec{T}$  della fune in direzione verticale e orientata verso l'alto.

Si noti che essendo il corpo di massa  $m$  assimilabile ad un punto materiale non ha senso precisare il punto di applicazione delle forze agenti su di esso.

Per la simmetria dei due supporti possiamo subito affermare che:

$$\vec{\mathcal{R}}_1 = \vec{\mathcal{R}}_2 = -\frac{M\vec{g}}{2} = \vec{\mathcal{R}} \quad (1a)$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F} \quad (1b)$$

Di tutte le forze agenti sul sistema l'unica potenzialmente non conservativa è la forza di tensione della fune, che però non compie lavoro a causa dell'instensibilità della fune stessa: infatti se il punto di applicazione della forza di tensione sul cilindro (diametralmente opposto al punto di contatto del cilindro con il piano) si sposta di un tratto  $dx$  verso destra, il lavoro positivo compiuto dalla forza di tensione sul cilindro è  $Tdx$ ; ma contemporaneamente il corpo di massa  $m$  si abbassa di un tratto di lunghezza  $dx$  verso il basso, per cui il lavoro negativo della forza di tensione su questo corpo è  $-Tdx$  ed il lavoro totale è nullo. Il sistema è quindi conservativo.

2) Scriviamo l'equazione del moto per il corpo di massa  $m$  e per il centro di massa del cilindro:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_m \\ M\vec{g} + \vec{T} + 2\vec{\mathcal{R}} + 2\vec{F} = M\vec{a}_M \end{cases} \quad (2)$$

dove abbiamo indicato rispettivamente con  $\vec{a}_m$  e  $\vec{a}_M$  le accelerazioni del corpo di massa  $m$  e del centro di massa del cilindro. In virtù della (1a) (che non è altro che la proiezione della seconda equazione del sistema (2) lungo la direzione verticale) possiamo semplificare il sistema ottenendo:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_m \\ \vec{T} + 2\vec{F} = M\vec{a}_M \end{cases} \quad (3)$$

Assumiamo (ipotesi che dovrà essere successivamente verificata) che la forza di tensione  $\vec{T}$  e le forze di attrito  $\vec{F}$  abbiano versi opposti. Proiettando la prima equazione del sistema (3) lungo la direzione verticale e la seconda lungo la direzione orizzontale si ottiene:

$$\begin{cases} mg - T = ma_m \\ T - 2F = Ma_M \end{cases} \quad (4)$$

in cui abbiamo scelto come positivo il verso corrispondente al moto del corpo di massa  $m$  nella prima equazione e del centro di massa del cilindro nella seconda. Appliciamo ora la seconda equazione cardinale della meccanica al moto di rotazione del cilindro scegliendo come asse di rotazione quello di contatto fra il cilindro ed i supporti, che indichiamo con il suffisso  $A$ . L'unica forza che ha un momento rispetto all'asse  $A$  è la forza di tensione  $\vec{T}$ , in quanto le forze di attrito sono applicate sull'asse stesso e la direzione verticale della forza di gravità passa per i punti di contatto fra il cilindro ed i supporti. Chiamando  $\vec{\alpha}$  l'accelerazione angolare del cilindro possiamo scrivere:

$$2\vec{R} \wedge \vec{T} = 2RT\hat{\alpha} = I_A\vec{\alpha} = \frac{3}{2}MR^2\vec{\alpha} = \frac{3}{2}MR^2\alpha\hat{\alpha} \implies T = \frac{3}{4}MR\alpha \quad (5)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la distanza dell'asse di rotazione dal punto di applicazione della forza di tensione è  $2R$  ed indicato con  $\hat{\alpha}$  il versore dell'accelerazione angolare. Sostituendo la (5) nel sistema (4) otteniamo:

$$\begin{cases} mg - \frac{3}{4}MR\alpha = ma_m \\ \frac{3}{4}MR\alpha - 2F = Ma_M \end{cases} \quad (6)$$

Le accelerazioni del centro di massa del cilindro e del punto di contatto  $Q$  fra il cilindro e la fune (diametralmente opposto a quello di contatto fra il cilindro ed i supporti) sono legati ad  $\vec{\alpha}$  dalle relazioni (imposte dalla condizione di puro rotolamento):

$$\begin{cases} \vec{a}_M = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} = \alpha R\hat{x} \\ \vec{a}_Q = \vec{\alpha} \wedge (2\vec{R}) = 2\vec{a}_M = 2\alpha R\hat{x} \end{cases} \quad (7)$$

dove l'asse  $\hat{x}$  corrisponde alla direzione orizzontale. Notiamo inoltre che per la conservazione della lunghezza della fune l'accelerazione  $\vec{a}_Q$  è in modulo eguale ad  $\vec{a}_m$ ; possiamo quindi combinare i sistemi (6) e (7) eliminando  $\vec{a}_Q$  e  $\vec{\alpha}$ :

$$\begin{cases} mg - \frac{3}{4}Ma_M = ma_m = 2ma_M \\ \frac{3}{4}Ma_M - 2F = Ma_M \implies F = -\frac{Ma_M}{8} \end{cases} \quad (8)$$

La soluzione della prima equazione del sistema (8) è:

$$a_M \left(2m + \frac{3}{4}M\right) = mg \implies a_M = \frac{4mg}{8m+3M} = \frac{4 \times 1 \times 9.8}{8 \times 1 + 3 \times 8} \text{ m/s}^2 = 1.225 \text{ m/s}^2 \quad (9)$$

Dalla seconda equazione del sistema (7) e dall'eguaglianza  $|\vec{a}_Q| = |\vec{a}_m|$  segue:

$$a_m = 2a_M = 2.45 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

Il modulo dell'accelerazione angolare del cilindro è:

$$\alpha = \frac{a_M}{R} = 4.08 \text{ rad/s}^2 \quad (11)$$

In base alla seconda equazione del sistema (8) otteniamo infine:

$$F = -\frac{Ma_M}{8} = -\frac{Mmg}{2(8m+3M)} = -1.225 \text{ N} \quad (12)$$

Il segno negativo di  $F$  indica semplicemente che l'ipotesi con cui la prima equazione del sistema (3) è stata trasformata nella prima equazione del sistema (4), cioè che  $\vec{T}$  e  $\vec{F}$  fossero dirette in versi opposti, è errata:  $\vec{T}$  e  $\vec{F}$  hanno lo stesso verso e quindi anche l'attrito partecipa al traino del cilindro, insieme alla forza di tensione. Il modulo della forza  $\vec{F}$  è quindi 1.225 N.

3) Per trovare il valore minimo del coefficiente di attrito statico necessario per il moto di puro rotolamento si può considerare o la reazione normale complessiva dei due supporti e la forza di attrito totale o le reazioni e le forze di attrito esercitate separatamente dai due supporti che devono avere lo stesso modulo per la simmetria del problema: il risultato finale è chiaramente lo stesso. Scegliamo il caso dei due supporti. Poiché la forza di attrito statico è espressa dalla (12) (in valore assoluto) ed il suo valore massimo è il prodotto del coefficiente di attrito statico e della reazione normale, affinché sia possibile il moto di puro rotolamento deve essere verificata la disequazione:

$$\mu_S^{\min} |\vec{R}| = \mu_S^{\min} \frac{Mg}{2} \geq F \quad \Rightarrow \quad \mu_S^{\min} \geq \frac{2F}{Mg} = \frac{1.225 \times 2}{8 \times 9.8} = 0.031 \quad (13)$$

4) Il moto del corpo di massa  $m$  è rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione  $a_m$ ; pertanto:

$$\Delta h = \frac{1}{2} a_m \Delta t^2 = \frac{1}{2} \times 2.45 \times 1^2 \text{ m} = 1.225 \text{ m} \quad (14)$$

Per ricavare la velocità  $V_M$  del cilindro possiamo utilizzare la conservazione dell'energia dato che il lavoro delle forze dissipative è nullo. Ponendo lo zero dell'energia potenziale nella posizione iniziale della massa  $m$  si ottiene:

$$E(0) = K(0) + U(0) = 0 + 0 = 0 = E(\Delta t) = K(\Delta t) + U(\Delta t) = K(\Delta t) - mg\Delta h \quad (15)$$

L'energia cinetica nell'istante  $\Delta t$  si compone dell'energia cinetica del corpo e di quella del cilindro. Poiché l'accelerazione del corpo è sempre doppia di quella del centro di massa del cilindro, anche la velocità del corpo è doppia di quella del centro di massa del cilindro per cui l'energia cinetica del corpo è:

$$K_m(\Delta t) = \frac{1}{2} m(2V_M)^2 = 2mV_M^2 \quad (16)$$

L'energia cinetica del cilindro si calcola immediatamente come energia cinetica di rotazione intorno all'asse di contatto. Ricordando la relazione fra la velocità del centro di massa e la velocità angolare in un moto di puro rotolamento otteniamo:

$$K_M(\Delta t) = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \frac{V_M^2}{R^2} = \frac{3}{4} MV_M^2 \quad (17)$$

L'energia cinetica totale è quindi:

$$K(\Delta t) = \frac{v_M^2}{4} (3M + 8m) = mg\Delta h \quad \Rightarrow V_M = \sqrt{\frac{4mg\Delta h}{(3M+8m)}} = 1.225 \text{ m/s} \quad (18)$$

Ovviamente il risultato si poteva ottenere molto più banalmente moltiplicando l'accelerazione uniforme del centro di massa, espressa dalla (9), per l'intervallo di tempo  $\Delta t$ ; con la procedura ora seguita si è voluto mostrare che la conservazione dell'energia unita all'ipotesi di moto di puro rotolamento consente di rispondere a questa domanda anche prescindendo dalle risposte alle domande precedenti.

## Esercizio 2

1) A causa della simmetria del problema le linee di forza del campo  $\vec{B}$  sono circonferenze con il centro sull'asse della distribuzione cilindrica. Si può quindi utilizzare la legge di Ampère scegliendo come percorso chiuso una circonferenza  $\gamma$  di raggio generico  $r$ , anch'essa con il centro sull'asse della distribuzione. Sempre per simmetria il campo  $\vec{B}$  può dipendere solo da  $r$ , per cui:

$$\vec{B}(r) = \hat{\theta}B(r) \quad (19)$$

ed in coordinate cilindriche l'unica componente non nulla del campo è quella tangenziale. Applicando la legge di Ampère si ha quindi:

$$\int_{\gamma} \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\gamma}(r) \quad (20)$$

dove  $I_{\gamma}(r)$  è la corrente concatenata alla circonferenza  $\gamma$  di raggio  $r$ . Per determinare  $I_{\gamma}(r)$  occorre osservare che la corrente totale della distribuzione è nulla, per cui  $I_{\gamma}(r)$  sarà zero per  $r > c$ . Dobbiamo poi distinguere gli intervalli a)  $r < a$ , b)  $a < r < b$  e c)  $b < r < c$ :

a)  $r < a$ :

in questo primo caso la circonferenza di Ampère abbraccia solo una parte del cilindro di raggio  $a$ , per cui la corrente concatenata sarà quella contenuta in un cilindro di raggio  $r$ , interamente all'interno di quello di raggio  $a$ , ed essendo la corrente uniformemente distribuita sulla sezione sarà proporzionale al rapporto tra le aree delle sezioni dei due cilindri:

$$I_{\gamma}(r < a) = i \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = i \frac{r^2}{a^2} \quad (21)$$

b)  $a < r < b$ :

in questo secondo caso la circonferenza di Ampère abbraccia integralmente il cilindro di raggio  $a$  ed una parte dell'intercapedine fra le due distribuzioni, in cui non c'è corrente. La corrente concatenata è quindi tutta quella del cilindro interno, ovvero:

$$I_{\gamma}(a < r < b) = i \quad (22)$$

c)  $b < r < c$ :

in questo terzo caso la circonferenza di Ampère si trova all'interno della distribuzione di corrente più esterna, per cui abbraccia integralmente il cilindro di raggio  $a$  e l'intercapedine ed una parte della distribuzione esterna, la cui sezione è una corona circolare di raggio interno  $b$  e raggio esterno  $c$ . Ricordando che la corrente nella distribuzione esterna ha lo stesso modulo, ma segno opposto rispetto a quella del cilindro interno si ha:

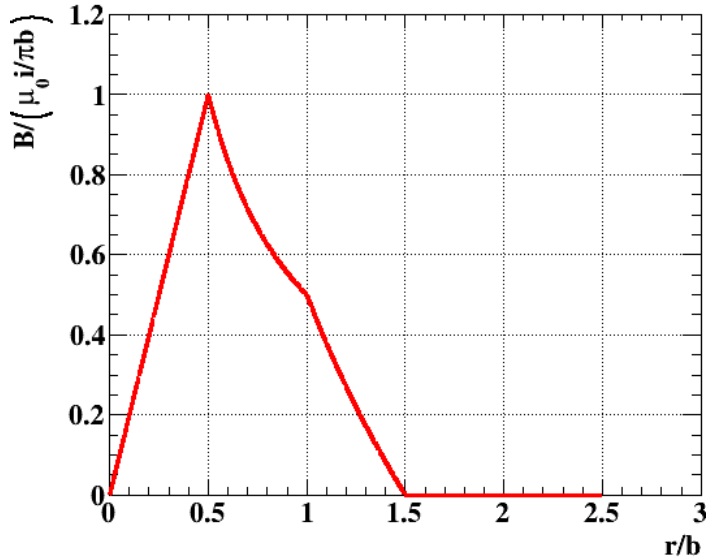
$$I_Y(b < r < c) = i - i \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = i \frac{(c^2 - b^2) - (r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} = i \frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)} \quad (23)$$

Combinando le (20) - (23) con l'osservazione che la corrente concatenata è nulla all'esterno della distribuzione si ottiene:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \times \begin{cases} \frac{r^2}{a^2} & r < a \\ 1 & a < r < b \\ \frac{(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases} \Rightarrow B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2} & r < a \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 i (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases} \quad (24)$$

2) Il grafico di  $B(r)$  è mostrato nella Figura seguente, in cui sull'asse  $\hat{x}$  è riportato il rapporto  $r/b$  e sull'asse  $\hat{y}$  il rapporto  $B(r)/(\frac{\mu_0 i}{\pi b})$ .

Appare evidente dal grafico (e lo si può dedurre calcolando gli opportuni limiti anche dalle (20)-(24)) che non sono presenti punti di discontinuità della funzione  $B(r)$ , ma solo della sua derivata. Infatti è ben noto che in magnetostatica le discontinuità del campo  $B$  sono associate alle distribuzioni superficiali di corrente che in questo problema non sono presenti. Le discontinuità di derivata in  $r = a$ ,  $r = b$  e  $r = c$  corrispondono invece, come usuale, ai limiti fisici delle distribuzioni di corrente di volume.



3) Poiché per ipotesi la corrente nel cilindro interno non esiste più, i campi calcolati nella (24) non sono più validi. Senza ripetere il calcolo dall'inizio si può però notare che per  $r < b$  non ci sono correnti, per cui all'interno della distribuzione, eccezion fatta per la regione  $b < r < c$  che non è rilevante per questa domanda, il campo dovuto alla distribuzione è nullo, ovvero:

$$B_{corona}(r < b) = 0 \quad (25)$$

e quindi in particolare lo è anche al centro ( $r = 0$ ). Nella (25) abbiamo aggiunto il suffisso "corona" perché dobbiamo tener conto anche del contributo del filo che, in base alla legge di Biot e Savart ed alla distanza  $3c$  del filo dall'asse della distribuzione è:

$$B_{filo}(r = 0) = \frac{\mu_0 i'}{2\pi(3c)} = \frac{\mu_0 i'}{6\pi c} \quad (26)$$

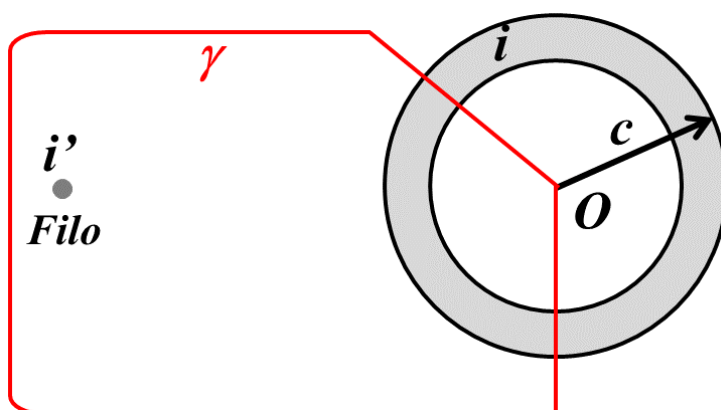
All'esterno della distribuzione ( $r > c$ ) il campo del filo segue ovviamente ancora la legge di Biot e Savart con l'opportuna distanza, mentre il contributo della distribuzione è dovuto alla sola corrente  $-i$  localizzata nella corona cilindrica compresa fra  $b$  e  $c$ . Poiché il punto  $P$  nella Figura del testo è a distanza  $2c$  dall'asse della distribuzione ed a distanza  $c$  dal filo, il campo complessivo in questo punto è:

$$B(P) = B_{corona}(P) + B_{filo}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( -\frac{i}{2c} + \frac{i'}{c} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi c} \left( i' - \frac{i}{2} \right) \quad (27)$$

Affinché, come richiesto nel testo, il campo in  $P$  sia l'opposto di quello al centro della distribuzione, la corrente  $i'$  deve soddisfare la condizione:

$$\left(i' - \frac{i}{2}\right) = -\frac{i'}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}i' = \frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad i' = \frac{3}{8}i \quad (28)$$

4) Per avere un integrale di circuitazione nullo lungo una linea chiusa  $\gamma$  occorre che, in accordo con la legge di Ampère, la corrente totale concatenata alla linea  $\gamma$  sia zero. Poiché per ipotesi la linea  $\gamma$  deve circondare il filo, la cui corrente è espressa dalla (28) ed ha verso opposto a quello della corrente nella distribuzione cilindrica, è necessario che la linea racchiuda una frazione pari a  $(3/8)$  della corrente della distribuzione stessa. Una possibile maniera per ottenere ciò è scegliere la linea  $\gamma$  mostrata in rosso nella Figura seguente.



I due segmenti che tagliano la distribuzione definiscono un angolo di  $3\pi/4$ , per cui la frazione di corrente contenuta all'interno della linea  $\gamma$  è:  $\frac{(3\pi/4)}{(2\pi)} = \frac{3}{8}$  come richiesto. In alternativa si può pensare ad un percorso che circonda separatamente il filo e la corona, circondando 8 volte il filo e 3 volte la corona.