

Esercizio 1

1) Scriviamo l'equazione del moto della massa m in un punto generico della sua traiettoria:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = m\left(-\frac{V^2(\theta)}{R}\hat{R} + \vec{a}_t\right) \quad (1)$$

dove \hat{R} è il versore radiale uscente dal centro della guida e diretto verso la posizione della massa sul bordo della guida stessa e \vec{a}_t è l'accelerazione tangenziale. La velocità nel punto generico corrispondente all'angolo θ è indicata con $V^2(\theta)$ perché dipende dall'altezza rispetto al suolo (e quindi da θ) a causa del lavoro compiuto dalla forza gravitazionale. Poiché la guida è senza attrito la reazione \vec{T} è diretta radialmente e quindi per determinare il suo valore è sufficiente proiettare la (1) sulla coordinata radiale, ovvero eseguire il prodotto scalare dei due membri di questa equazione con il versore \hat{R} :

$$(\vec{T} + m\vec{g}) \cdot \hat{R} = -T + mg \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = m\left(-\frac{V^2(\theta)}{R}\hat{R} + \vec{a}_t\right) \cdot \hat{R} = -m\frac{V^2(\theta)}{R} \quad (2)$$

(si faccia attenzione alla definizione di θ , che è misurato a partire dal diametro orizzontale). Essendo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \quad (3)$$

si ottiene, isolando la reazione T e cambiando opportunamente i segni:

$$T = m\left(\frac{V^2(\theta)}{R} - g \sin\theta\right) \quad (4)$$

Per completare la risposta è necessario determinare l'espressione di $V^2(\theta)$. Poiché il sistema è conservativo si può utilizzare la conservazione dell'energia fra i punti A e P scrivendo:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2(\theta)}{2} + mgR(1 + \sin\theta) \quad (5)$$

da cui si ricava:

$$V^2(\theta) = V_0^2 - 2gR(1 + \sin\theta) \quad (6)$$

Sostituendo nella (4) si ottiene infine:

$$T = m\left(\frac{V_0^2 - 2gR(1 + \sin\theta)}{R} - \sin\theta\right) = m\left(\frac{V_0^2}{R} - g(2 + 3 \sin\theta)\right) \quad (7)$$

2) Affinché la massa m possa compiere un giro completo della guida è necessario che la reazione della guida sia positiva lungo l'intera traiettoria. Poiché (formula (7)) il valore minimo della reazione si ottiene per $\theta = \pi/2$ corrispondente, come intuitivo, al punto più alto della guida, la condizione limite da soddisfare per compiere un giro completo è che in tale punto la reazione diventi nulla, ovvero:

$$\left(\frac{V_{min}^2}{R} - g(2 + 3 \sin \theta)|_{\theta=\pi/2}\right) = \left(\frac{V_{min}^2}{R} - 5g\right) = 0 \Rightarrow V_{min} = \sqrt{5Rg} = 4.43 \text{ m/s} \quad (8)$$

3) Essendo la velocità iniziale inferiore a V_{min} la massa m non compie un giro completo della guida, ma se ne distacca durante la fase di salita. Poiché nel punto di distacco la reazione della guida si annulla, per determinare l'angolo θ_0 è sufficiente richiedere che:

$$\left(\frac{V_0^2}{R} - g(2 + 3 \sin \theta)|_{\theta=\theta_0}\right) = 0 \quad (9)$$

Sostituendo l'espressione di V_0 in termini di V_{min} si ottiene:

$$\left(\frac{16}{25} \frac{5Rg}{R} - g(2 + 3 \sin \theta_0)\right) = 0 \Rightarrow \frac{16}{5}g - 2g = 3g \sin \theta_0 \Rightarrow \sin \theta_0 = \frac{2}{5} \Rightarrow \theta_0 = 23.58^\circ \quad (10)$$

4) Sfruttiamo ancora la conservazione dell'energia, questa volta fra il punto A a quota zero ed il punto D a quota R dal suolo (si noti che i dettagli della traiettoria dal punto di distacco a D sono irrilevanti). Otteniamo quindi:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{16 \times 5Rg}{25} = \frac{8mRg}{5} = \frac{mV^2(D)}{2} + mgR \Rightarrow V^2(D) = \frac{6Rg}{5} \Rightarrow V(D) = \sqrt{\frac{6Rg}{5}} = 2.17 \text{ m/s} \quad (11)$$

La risposta alle domande 2), 3) e 4) non dipende dalla massa m perché sono tutte e tre basate sulla conservazione dell'energia del corpo durante il suo moto. Poiché sia l'energia potenziale che quella cinetica sono proporzionali alla massa, m è un fattore comune che si semplifica nei calcoli.

Esercizio 2

1) Data la simmetria del sistema il campo elettrico prodotto dalla sfera carica in un punto arbitrario P è radiale e dipende solo dalla distanza r di P dal centro O . Si può quindi utilizzare la legge di Gauss distinguendo i casi $r < r_0$ e $r > r_0$. L'espressione del campo elettrico è:

$$\vec{E} = \hat{r}E(r) \quad (12)$$

Scegliamo una superficie gaussiana sferica S_C concentrica alla sfera carica e di raggio r . Poiché il campo dipende solo da r , sulla superficie della sfera il campo ha modulo costante ed il flusso di \vec{E} attraverso S_C è:

$$\Phi_{S_C}(\vec{E}) = \int_{S_C} \vec{E} \cdot \hat{n} dS_C = E(r) \times Area(S_C) = 4\pi r^2 E(r) \quad (13)$$

La carica interna Q_{int} è:

$$Q_{int} = \begin{cases} \frac{4\pi\rho r^3}{3} & r < r_0 \\ \frac{4\pi\rho r_0^3}{3} & r > r_0 \end{cases} \quad (14)$$

da cui si ottiene:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho r^3}{3 \times 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & r < r_0 \\ \frac{4\pi\rho r_0^3}{3 \times 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r_0^3}{3r^2 \epsilon_0} & r > r_0 \end{cases} \quad (15)$$

Per determinare il potenziale elettrostatico in funzione di r si utilizza la definizione con la condizione di potenziale nullo a distanza infinita dalla distribuzione. Partiamo dall'intervallo $r_0 \leq r < +\infty$:

$$V(\infty) - V(r_0 \leq r < +\infty) = - \int_r^{+\infty} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}' \quad \Rightarrow \quad V(r_0 \leq r < +\infty) = \int_r^{+\infty} E(r') dr' \quad (16)$$

Sviluppando la (16) otteniamo:

$$V(r_0 \leq r < +\infty) = \int_r^{+\infty} \frac{\rho r_0^3}{3r'^2 \epsilon_0} dr' = \frac{\rho r_0^3}{3r \epsilon_0} \quad (17)$$

In particolare per $r = r_0$ abbiamo:

$$V(r_0) = \frac{\rho r_0^2}{3\epsilon_0} = 66.7 \text{ V} \quad (18a)$$

e per $r = 2r_0$:

$$V(2r_0) = \frac{\rho r_0^2}{6\epsilon_0} = 33.3 \text{ V} \quad (18b)$$

Passando ora alla regione occupata dalla sfera ($0 \leq r \leq r_0$) possiamo scrivere:

$$V(r_0) - V(r) = - \int_r^{r_0} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}' = - \int_r^{r_0} E(r') dr' = - \int_r^{r_0} \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} dr' = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_r^{r_0} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - r_0^2) \quad (19)$$

Riarrangiando i termini si ottiene:

$$V(r) = V(r_0) - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - r_0^2) \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{\rho r_0^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - r_0^2) = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \quad (20)$$

In particolare quindi:

$$V(0) = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} = 100 \text{ V} \quad (21)$$

2) Poiché sull'elettrone agisce la sola forza elettrostatica (conservativa !) si può utilizzare il principio di conservazione dell'energia fra il punto iniziale a distanza $2r_0$ dal centro della sfera ed il punto finale a distanza nulla o alternativamente il teorema delle forze vive nello stesso intervallo. Si ha quindi:

$$E(2r_0) = K(2r_0) + U(2r_0) = 0 - eV(2r_0) = E(0) = K(0) + U(0) = \frac{mv_f^2}{2} - eV(0) \quad (22)$$

da cui:

$$v_f = \sqrt{\frac{2e}{m} (V(0) - V(2r_0))} = \sqrt{\frac{2e}{m} \left(\frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r_0^2}{6\epsilon_0} \right)} = \sqrt{\frac{2e\rho r_0^2}{3m\epsilon_0}} = 4.84 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (23)$$

3) In base alla seconda legge di Newton i punti di massima e minima accelerazione sono quelli di massima e minima intensità della forza agente sull'elettrone e quindi della massima e minima intensità del campo elettrico prodotto dalla sfera carica. Il campo elettrico è nullo al centro della sfera, cresce linearmente fino a $r = r_0$ e poi decresce come $1/r$ con continuità nel punto r_0 (formula (15)), per cui assume il suo valore minimo al centro e massimo sul bordo. Dunque:

$$a_{max} = \frac{|q|E(r_0)}{m} = \frac{e\rho r_0}{3\varepsilon_0 m} = 1.17 \times 10^{14} \text{ m/s}^2 \quad a_{min} = 0 \quad (24)$$

4) La forza frenante esercita un lavoro dissipativo \mathcal{L}_{diss} sull'elettrone, diminuendo la sua energia cinetica. Mentre nella domanda 2) l'elettrone giungeva al centro della sfera anche con velocità iniziale nulla perché era soggetto solo ad un lavoro accelerante \mathcal{L}_{el} compiuto dal campo elettrostatico, in questa domanda occorre applicare il teorema delle forze vive assegnando all'elettrone una velocità iniziale v_0 . Si ottiene allora:

$$K_f - K_i = K(0) - K(2r_0) = K(0) - \frac{mv_0^2}{2} = \mathcal{L}_{el} - \mathcal{L}_{diss} = e(V(0) - V(2r_0)) - Fr_0 \quad (25)$$

dove si è tenuto conto del fatto che la forza F agisce solo all'interno della sfera. La condizione minima corrisponde al caso in cui l'elettrone giunge al centro della sfera con velocità nulla, per cui possiamo porre $K(0) = 0$. Notiamo inoltre che il lavoro \mathcal{L}_{el} è eguale all'energia cinetica guadagnata dall'elettrone in presenza della sola forza elettrostatica e quindi, tenendo conto della (22), ricaviamo dalla (25) l'espressione del valore minimo di v_0 :

$$v_{min}^2 = -\frac{2e\rho r_0^2}{3m\varepsilon_0} + \frac{2Fr_0}{m} \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{\frac{2Fr_0}{m} - \frac{2e\rho r_0^2}{3m\varepsilon_0}} = 9.3 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (26)$$

Si noti che il radicale presente nella (26) ha senso solo se $\frac{2Fr_0}{m} - \frac{2e\rho r_0^2}{3m\varepsilon_0} > 0$ ovvero se il lavoro della forza di attrito è in valore assoluto maggiore del lavoro della forza elettrostatica. In caso contrario non esiste una velocità iniziale minima: l'elettrone giunge nel centro della sfera anche partendo con velocità iniziale nulla, ovviamente con una velocità finale minore di quella calcolata nella (22) per effetto del lavoro dissipativo \mathcal{L}_{diss} .