Soluzione Quarto Compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 18/09/2019

Esercizio 1

1) Il valore della massa m si ricava imponendo l'equilibrio dei momenti di rotazione agenti sulla sbarra rispetto al supporto O. Le forze che danno contributo ai momenti sono le forze peso della sbarra stessa (dato che il supporto non è applicato in corrispondenza del centro di massa) e della massa m, per cui si ha:

$$\vec{\tau}_{m\vec{g}} + \vec{\tau}_{M\vec{g}} = 0 \quad \Rightarrow -\left(\frac{L}{2} - s\right)\hat{x} \wedge (-mg\hat{y}) + s\hat{x} \wedge (-Mg\hat{y}) = 0 \tag{1}$$

dove gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono definiti nella figura del testo. Eliminando i fattori ed i versori comuni si ottiene quindi:

$$\left(\frac{L}{2} - s\right)m = sM \quad \Rightarrow m = \frac{sM}{\frac{L}{2} - s} = \frac{2Ms}{L - 2s} \tag{2}$$

2) L'accelerazione angolare della sbarra nell'istante immediatamente successivo alla rimozione della massa m si determina utilizzando la seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi, ricordando che è presente a questo punto solo il momento dovuto alla forza peso della sbarra:

$$\vec{\tau}_{M\vec{g}} = s\hat{x} \wedge (-Mg\hat{y}) = -Mgs\hat{z} = I_O\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{Mgs}{I_O}\hat{z} \tag{3}$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto al supporto O si utilizza il teorema di Huygens-Steiner, ricordando che il momento d'inerzia baricentrale di una sbarra di massa M e lunghezza L è $ML^2/12$:

$$I_O = I_C + M\overline{OC}^2 = \frac{ML^2}{12} + Ms^2 = \frac{M}{12}(L^2 + 12s^2) \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) si ha infine:

$$\vec{\alpha} = -\frac{Mgs}{\frac{M}{12}(L^2+12s^2)}\hat{z} = -\frac{12gs}{L^2+12s^2}\hat{z} \tag{5}$$

3) Il valore di s che massimizza $|\vec{\alpha}|$ si ricava, come usuale, calcolando la derivata di $|\vec{\alpha}|$ rispetto a s, ponendola a zero e controllando che il segno della derivata sia positivo a sinistra del punto stazionario s^* e negativo a destra:

$$\frac{d|\vec{\alpha}|}{ds} = 12g\left[\frac{1}{L^2+12s^2} - \frac{s\cdot 24s}{(L^2+12s^2)^2}\right] = 12g\left[\frac{L^2+12s^2-24s^2}{(L^2+12s^2)^2}\right] = 12g\left[\frac{L^2-12s^2}{(L^2+12s^2)^2}\right]_{s=s^*} = 0 \tag{6}$$

Si ottiene quindi, essendo s^* per definizione una quantità positiva:

$$s^* = \frac{L}{\sqrt{12}} = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{48\ \text{cm}}{2\sqrt{3}} = 13.86\ \text{cm} \tag{7}$$

Per $s < s^*$ il numeratore della (6) è positivo, mentre per $s > s^*$è negativo, per cui s^*è effettivamente un punto di massimo. L'accelerazione angolare in corrispondenza del massimo si ottiene per sostituzione diretta nella (5):

$$\vec{\alpha}(s^*) = -\frac{12gs^*}{L^2+12s^{*2}}\hat{z} = -\frac{12gL}{2\sqrt{3}(L^2+L^2)}\hat{z} = -\frac{2\sqrt{3}gL}{2L^2}\hat{z} = -\frac{\sqrt{3}g}{L}\hat{z} = -35.4 \text{ rad/s}^2\ \hat{z} \tag{8}$$

4) Dalla prima equazione cardinale della meccanica dei sistemi applicata alla sbarra si ha:

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_C \quad \Rightarrow \vec{R} = M(\vec{a}_C - \vec{g}) \tag{9}$$

dove $\vec{R}$ è la reazione cercata e $\vec{a}_C$ è l'accelerazione del centro di massa della sbarra. Quest'ultima si ricava dall'espressione di $\vec{\alpha}(s^*)$ ricordando la relazione fra $\vec{\alpha}(s^*)$, $\vec{a}_C$ e s^*:

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}(s^*)\,\Lambda\, s^*\hat{x} = -\frac{\sqrt{3}g}{L}\hat{z}\,\Lambda\,\frac{L}{2\sqrt{3}}\hat{x} = -\frac{g}{2}(\hat{z}\,\Lambda\,\hat{x}) = -\frac{g}{2}\hat{y} \tag{10}$$

Sostituendo nella (9) si ha:

$$\vec{R} = M(\vec{a}_C - \vec{g}) = M\left(-\frac{g}{2}\hat{y} + g\hat{y}\right) = \frac{Mg}{2}\hat{y} = 14.7 \text{ N}\hat{y} \tag{11}$$

Esercizio 2

1) Le capacità dei due condensatori si calcolano immediatamente applicando le formule rispettivamente del condensatore sferico con il dielettrico inserito e del condensatore a facce piane e parallele con il vuoto tra le piastre:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{rr'}{r'-r}\right) = 712 \text{ pF} \tag{12a}$$

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{h} = 111 \text{ pF} \tag{12b}$$

Nella (12a) $r = d/2 = 0.03$ m e $r' = d'/2 = 0.0305$ m e $\varepsilon_r = 3.5$.

2) All'equilibrio i due condensatori devono essere equipotenziali, per cui $V = V'$. Dette allora Q e Q' le cariche sulle armature dei due condensatori all'equilibrio e ricordando la relazione fra carica, capacità e potenziale si ottiene:

$$V = \frac{Q}{C} = V' = \frac{Q'}{C'} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C} = \frac{Q'}{C'} \tag{13}$$

Per la conservazione della carica elettrica sussiste tra le cariche Q e Q' l'ulteriore relazione:

$$Q + Q' = Q_0 \quad \Rightarrow Q' = Q_0 - Q \tag{14}$$

Sostituendo la (14) nella (13) si ottiene:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_0-Q}{C'} = \frac{Q_0}{C'} - \frac{Q}{C'} \quad \Rightarrow Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) = Q\left(\frac{C'+C}{CC'}\right) = \frac{Q_0}{C'} \quad \Rightarrow Q = Q_0\frac{C}{C'+C} = 173\ \mu\text{C} \tag{15}$$

Dalla (15) si ricava immediatamente, o per sostituzione nella (14) o per analogia formale:

$$Q' = Q_0\frac{C'}{C'+C} = 27\ \mu\text{C} \tag{16}$$

3) Il bilancio energetico del sistema si può descrivere nella maniera seguente: la batteria trasferisce sul condensatore C una quantità di carica Q_0, a cui corrisponde un'energia iniziale del sistema di valore:

$$E_{in} = \frac{Q_0^2}{2C} \tag{17}$$

Il secondo condensatore inizialmente non contribuisce perché è scarico. Invece al raggiungimento dell'equilibrio entrambi i condensatori sono carichi, con le cariche Q e Q' date dalle (15) e (16); pertanto l'energia finale è:

$$E_{fin} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q'^2}{2C'} = \frac{Q_0^2}{2C}\left(\frac{C}{C'+C}\right)^2 + \frac{Q_0^2}{2C'}\left(\frac{C'}{C'+C}\right)^2 = \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{C}{(C'+C)^2} + \frac{C'}{(C'+C)^2}\right) = \frac{Q_0^2}{2(C'+C)} \tag{18}$$

L'unico processo dissipativo (trascurando l'emissione di radiazione) è l'effetto Joule sulla resistenza, per cui per l'energia dissipata E_{diss} si può scrivere:

$$E_{diss} = E_{fin} - E_{in} = \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{1}{(C'+C)} - \frac{1}{C}\right) = -\frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{C'}{C(C'+C)}\right) = -3.79\ \mathrm{J} \tag{19}$$

Il valore della resistenza è ininfluente perché non entra esplicitamente nel bilancio energetico del sistema, ma solo nella costante tempo di scarica quando i due condensatori vengono collegati.

4) Per determinare la corrente in funzione del tempo si considera il circuito mostrato nella parte bassa della Figura del testo come un normale circuito di scarica di un condensatore e si applica la seconda legge di Kirchhoff. Non essendoci elementi attivi la somma delle differenze di potenziale è nulla e procedendo da sinistra a destra si ha:

$$\frac{Q}{C} - RI - \frac{Q}{C'} = 0 \qquad \Rightarrow RI = \frac{Q}{C} - \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{C} - \frac{Q_0}{C'} + \frac{Q}{C'} = Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) - \frac{Q_0}{C'} \tag{20}$$

Poiché ad una corrente positiva corrisponde una diminuzione della carica presente su C, la relazione fra $I(t)$ e $Q(t)$ è:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \tag{21}$$

Sostituendo nella (20) si ottiene quindi l'equazione differenziale del primo ordine non omogenea:

$$R\frac{dQ}{dt} + Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) = \frac{Q_0}{C'} \tag{22}$$

L'omogenea associata, dopo aver diviso per R e calcolato il minimo comune multiplo, ha la forma:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(C'+C)}{RCC'} = 0 \tag{23}$$

la cui soluzione è:

$$Q_{om}(t) = A\exp(-t/\tau) \tag{24}$$

dove A è la costante di integrazione e

$$\tau = \frac{RCC'}{(C'+C)} \tag{25}$$

La soluzione particolare della non omogenea si determina considerando la situazione di regime, cioè quella corrispondente al raggiungimento dell'equilibrio. Tale soluzione è peraltro già nota, perché la condizione di regime è espressa dalla (15). Verifichiamolo imponendo $\frac{dQ}{dt} = 0$ nella (22):

$$Q_{eq}\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right) = Q_{eq}\left(\frac{C+C'}{CC'}\right) = \frac{Q_0}{C'} \qquad \Rightarrow Q_{eq} = Q_0\left(\frac{C}{C+C'}\right) \tag{26}$$

come nella (15). La soluzione completa della (22) è quindi:

$$Q(t) = Q_{om}(t) + Q_{eq} = A\exp(-t/\tau) + Q_0\left(\frac{C}{C+C'}\right) \tag{27}$$

All'istante $t = 0$ il condensatore C è completamente carico, per cui:

$$Q(t) = Q_0 = A + Q_0\left(\frac{C}{C+C'}\right) \qquad \Rightarrow A = Q_0\left(\frac{C'}{C+C'}\right) \tag{28}$$

Otteniamo dunque l'espressione finale per $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{Q_0}{C+C'}\left(C'\exp(-t/\tau) + C\right) \tag{29}$$

La corrente $I(t)$ si determina usando la (21):

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{C+C'}C'\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{Q_0C'}{C+C'}\frac{(C'+C)}{RCC'}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{Q_0}{RC}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{30}$$

Calcoliamo il rapporto fra la carica all'istante generico t espressa dalla (29) e la carica all'equilibrio, espressa dalla (15):

$$\frac{Q(t)}{Q} = \frac{C+C'\exp(-t/\tau)}{C} = 1 + \frac{C'}{C}\exp(-t/\tau) \tag{31}$$

Affinché la differenza fra carica sul condensatore all'istante t e quella all'equilibrio sia inferiore all'1% è sufficiente richiedere che il valore del secondo addendo sia < 0.01. Pertanto:

$$\frac{C'}{C}\exp(-t/\tau) < 0.01 \;\Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) < 0.01\frac{C}{C'} \;\Rightarrow t > -\tau\ln\left(0.01\frac{C}{C'}\right) = 2.75\,\tau = 0.264\,\mu s \tag{32}$$