

## Soluzione Terzo Compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 19/07/2019

### Esercizio 1

1) La molla è inizialmente a riposo e poi inizia ad allungarsi e a ruotare finché il suo estremo libero raggiunge il punto  $B$ . Poiché la distanza da  $O$  a  $C$  è:

$$\overline{OC} = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3} \quad (1)$$

ed il triangolo  $OBC$  è rettangolo, la lunghezza del segmento  $\overline{OB}$ , tramite il teorema di Pitagora, risulta:

$$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{5R}{3}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\frac{16R^2}{9}} = \frac{4R}{3} \quad (2)$$

La variazione di energia potenziale della molla è quindi:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(l_f - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_{in} - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{4R}{3} - \frac{2R}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{2R}{3} - \frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}k\frac{4R^2}{9} = \frac{2kR^2}{9} \quad (3)$$

dove  $l_{in}$  e  $l_f$  sono le lunghezze iniziale (coincidente con quella a riposo  $l_0$ ) e finale della molla. Poiché per definizione la variazione di energia potenziale di una forza conservativa è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza, il lavoro della forza elastica è:

$$\mathcal{L}_{El} = -\Delta U = -\frac{2kR^2}{9} \quad (4)$$

2) Nel processo di deformazione della molla dal punto  $A$  al punto  $B$  l'energia meccanica si conserva. Il punto materiale è in quiete sia nell'istante iniziale (in cui la molla è a riposo) sia nell'istante finale, in cui raggiunge la minima quota consentita. Possiamo pertanto scrivere:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = 0 + mgh = E_f = K_f + U_f = 0 + \frac{2kR^2}{9} \quad (5)$$

in cui abbiamo sostituito il risultato (4) ed abbiamo indicato con  $h$  la differenza di quota. L'altezza  $h$  corrisponde alla distanza del punto  $B$  dalla retta  $\overline{OC}$  per cui vale  $R \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato da  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ . Dalle relazioni trigonometriche del triangolo  $OBC$  si ottiene:

$$R \sin \theta = R \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = R \frac{4R}{3} \frac{3}{5R} = \frac{4R}{5} \quad (6)$$

Sostituendo nella (5) si ha:

$$k = \frac{4mgR}{5} \frac{9}{2R^2} = \frac{18mg}{5R} = 4.41 \text{ N/m} \quad (7)$$

3) Quando il punto materiale è in  $B$  il sistema è fermo ( $V = 0$ ), per cui l'accelerazione centripeta è nulla e l'unica accelerazione del punto materiale è quella tangenziale  $\vec{a}_t$ . Poiché il filo e la molla sono perpendicolari la molla non esercita forze in direzione radiale, per cui l'equazione del moto nella direzione  $CB$  è:

$$m\vec{a}_c = 0 = \vec{T} - mg \sin \theta \hat{R} \quad (8)$$

Si ricava quindi, tenendo conto della (6):

$$T = mg \sin \theta = \frac{mg}{R} \frac{4R}{5} = \frac{4mg}{5} = 0.784 \text{ N} \quad (9)$$

4) L'equazione del moto nella direzione tangenziale si scrive nella forma:

$$m\vec{a}_t = \vec{F}_{el} - mg \cos \theta \hat{\theta} = (k(l_f - l_0) - mg \cos \theta) \hat{\theta} \quad (10)$$

Poiché:

$$\cos \theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{R}{(5/3)R} = \frac{3}{5} \quad (11)$$

sostituendo la (11) e la (7) si ottiene, con le stesse notazioni della (3):

$$m\vec{a}_t = -(k(l_f - l_0) - mg \cos \theta) \hat{\theta} \Rightarrow \vec{a}_t = -\left(\frac{kR}{m} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{5}g\right) \hat{\theta} = -\left(\frac{2R}{3} \frac{18mg}{5Rm} - \frac{3}{5}g\right) \hat{\theta} = -\frac{27g}{15} \hat{\theta} = -17.6 \text{ m/s}^2 \hat{\theta} \quad (12)$$

## Esercizio 2

1) Poiché il sistema è a simmetria cilindrica, il campo di induzione magnetica è diretto tangenzialmente, per cui possiamo applicare la legge di Ampère utilizzando come percorso chiuso una circonferenza  $\gamma$  centrata sul filo di raggio  $5a$  e passante per il punto  $P$ . La circuitazione del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  lungo la circonferenza  $\gamma$  è:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi(5a) = 10\pi a B = \mu_0 I_{tot} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{tot}}{10\pi a} \quad (13)$$

dove  $I_{tot}$  è la corrente totale concatenata alla circonferenza  $\gamma$ . Poiché la circonferenza racchiude totalmente la sezione trasversale della distribuzione di corrente, per il calcolo di  $I_{tot}$  sono rilevanti solo la corrente sul filo e la corrente totale di volume, cioè rispettivamente  $I$  e  $I'$ ; dunque:

$$I_{tot} = I + I' \Rightarrow B = \frac{\mu_0(I+I')}{10\pi a} = \frac{\mu_0 I}{20\pi a} \Rightarrow \frac{(I+I')}{10} = \frac{I}{20} \Rightarrow I' = -\frac{I}{2} \quad (14)$$

Poiché è rilevante solo la corrente totale della distribuzione la forma dettagliata della funzione  $f(r)$  è ininfluenza.

2) Il flusso infinitesimo della densità di corrente  $\vec{J}(r)$  attraverso la sezione  $\vec{A}$  del cilindro che contiene la distribuzione è:

$$d\Phi(\vec{J}) = \vec{J} \cdot d\vec{A} = J(r) 2\pi r dr = -\alpha(r - a) 2\pi r dr \quad (15)$$

dove il segno “-” è dovuto al fatto che la corrente si propaga nel verso negativo di  $z$ . Il flusso totale, che corrisponde alla corrente  $I'$ , è:

$$I' = \Phi(\vec{J}) = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\int_a^{2a} \alpha(r - a) 2\pi r dr = -2\pi\alpha \int_a^{2a} (r^2 - ra) dr = -2\pi\alpha \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{ar^2}{2} \right]_a^{2a} = -2\pi\alpha \left( \frac{8a^3}{3} - \frac{4a^3}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{aa^2}{2} \right) = -2\pi\alpha a^3 \left( \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \right) = -2\pi\alpha a^3 \frac{5}{6} = -\frac{5}{3}\pi\alpha a^3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3I'}{5\pi a^3} = \frac{3I}{10\pi a^3} \quad (16)$$

Per quanto riguarda il campo di induzione magnetica, possiamo notare che nelle regioni  $r < a$  e  $r > b$  i campi non risentono della dipendenza della corrente di volume dal raggio: infatti per  $r < a$  il campo è dovuto solo al filo, mentre per  $r > 2a$  dipende solo, come già osservato dalla carica totale. Possiamo quindi scrivere,

applicando la legge di Ampère a tre circonferenze concentriche, di raggi rispettivamente  $r < a$ ,  $a < r < 2a$  e  $r > 2a$ :

$$\begin{cases} \vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \\ \vec{B}(a < r < 2a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} - \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \hat{\theta} \\ \vec{B}(r > 2a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{\theta} \end{cases} \quad (17)$$

Nel sistema (17) resta da determinare la corrente  $I(r)$ , che si ottiene per integrazione come nella (16), con la sostituzione:  $2a \rightarrow r$ . Pertanto, sostituendo  $\alpha$  dalla (16):

$$I(r) = -\int_a^r \alpha(r-a)2\pi r dr = -2\pi\alpha \left[ \frac{r'^3}{3} - \frac{ar'^2}{2} \right]_a^r = \frac{2\pi 3I}{10\pi a^3} \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{ar^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} \right] = \frac{3I}{5a^3} \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{ar^2}{2} + \frac{a^3}{6} \right] \quad (18)$$

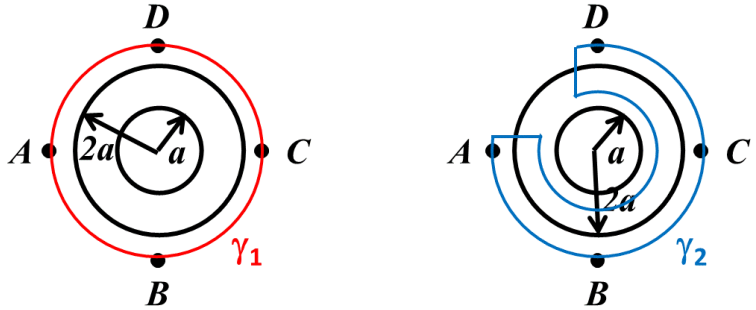
Per controllo calcoliamo  $I(2a)$  che sappiamo essere eguale a  $I/2$ :

$$I(2a) = \frac{3I}{5a^3} \left[ \frac{8a^3}{3} - 2a^2 + \frac{a^3}{6} \right] = \frac{3I}{5a^3} \left[ \frac{2a^3}{3} + \frac{a^3}{6} \right] = \frac{3I}{5a^3} \frac{5a^3}{6} = \frac{I}{2}$$

come richiesto. Possiamo quindi completare la (17):

$$\vec{B}(a < r < 2a) = \frac{\mu_0(I-I(r))}{2\pi r} \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I \hat{\theta}}{2\pi r} \left( 1 - \frac{3}{5} \left[ \frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{1}{6} \right] \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{9}{10} - \frac{r^3}{5a^3} + \frac{3r^2}{10a^2} \right) \hat{\theta} \quad (19)$$

3) Secondo la legge di Ampère la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo una linea chiusa è proporzionale alla corrente concatenata alla linea; pertanto per ottenere due valori diversi della circuitazione è sufficiente scegliere due percorsi chiusi che, pur passando dagli stessi punti e nello stesso ordine, abbiano differenti correnti concatenate. Due esempi sono mostrati nella Figura a fianco: la linea rossa  $\gamma_1$  circonda l'intera distribuzione, per cui la corrente concatenata è la somma della corrente del filo e di quella di volume nel cilindro, mentre la linea blu  $\gamma_2$  tiene il filo all'esterno ed include circa tre quarti della corrente del cilindro, per cui si ha:



$$\oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2}; \quad \oint_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} \approx -\frac{3\mu_0 I}{8} \quad (20)$$

4) Se la corrente di volume fosse distribuita uniformemente lungo la sezione del cilindro cambierebbe solo l'espressione di  $I(r)$  nella seconda equazione del sistema (17) e conseguentemente l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione di spazio compresa fra  $r = a$  e  $r = 2a$ . Utilizzando la forma  $J(r) = \beta$  si avrebbe:

$$I' = \Phi(\vec{J}) = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_a^{2a} -\beta 2\pi r dr = -2\pi\beta \left[ \frac{r^2}{2} \right]_a^{2a} = -\frac{2\pi\beta}{2} (4a^2 - a^2) = -3\pi\beta a^2 \quad (21)$$

da cui:

$$\beta = -\frac{I'}{3\pi a^2} = \frac{I}{6\pi a^2} \quad (22)$$

L'espressione per  $I(r)$  è quindi:

$$I(r) = \int_a^r -\beta 2\pi r' dr' = -2\pi\beta \left[ \frac{r'^2}{2} \right]_a^r = -\frac{2\pi\beta}{2}(r^2 - a^2) = -\frac{\pi I}{6\pi a^2}(r^2 - a^2) = -\frac{I}{6} \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right) \quad (23)$$

Per sostituzione otteniamo quindi l'analogia della seconda delle (17), cioè il campo di induzione magnetica fra  $a$  e  $2a$ :

$$\vec{B}(a < r < 2a) = \frac{\mu_0(I - I(r))}{2\pi r} \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I \hat{\theta}}{2\pi r} \left( 1 - \frac{1}{6} \left[ \frac{r^2}{a^2} - 1 \right] \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( \frac{7}{6} - \frac{r^2}{6a^2} \right) \hat{\theta} \quad (24)$$