Soluzione Secondo Compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 28/06/2019

Esercizio 1

1) Il momento d'inerzia è una quantità additiva. Poiché i due cilindri sono saldati insieme in modo che i loro centri giacciano sull'asse comune, il momento d'inerzia baricentrale di ciascuno di essi è il semiprodotto della massa per il quadrato del raggio, come usuale. Il momento d'inerzia baricentrale totale è quindi:

$$I_{CM} = \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_2^2}{2} = \frac{MR^2}{2} + \frac{2M(3/2\,R)^2}{2} = MR^2\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{11\,MR^2}{4} \tag{1}$$

Per ricavare il momento d'inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione si utilizza il teorema di Huygens-Steiner. La distanza dell'asse di contatto dall'asse baricentrale è $R_2 = (3/2)R$, per cui:

$$I_P = I_{CM} + (M_1 + M_2)R_2^2 = \frac{11\,MR^2}{4} + 3M\frac{9R^2}{4} = MR^2\left(\frac{11}{4} + \frac{27}{4}\right) = \frac{19\,MR^2}{2} \tag{2}$$

2) Sul sistema completo agiscono la forza di gravità sul corpo rigido, la forza di gravità sulla massa m, la reazione normale del piano sul corpo rigido, la forza di attrito statico fra il piano ed il corpo rigido e la forza di tensione della fune, applicata sia al corpo rigido che alla massa m. Le prime quattro forze sono esterne, mentre la forza di tensione è interna per il sistema completo ed esterna per il solo corpo rigido. Poiché il corpo rigido si muove solo orizzontalmente la forza di gravità su di esso è annullata dalla reazione del piano; inoltre entrambe queste forze sono ortogonali allo spostamento per cui non compiono lavoro. La dinamica del sistema è quindi determinata dalle altre forze elencate, per cui analizziamo l'effetto di tali forze sulle grandezze cinematiche e dinamiche del corpo rigido e del sistema completo.
2*a*) La quantità di moto del corpo rigido <u>non si conserva</u> a causa delle forze esterne: attrito statico e tensione della fune.
2*b*) Anche la quantità di moto del sistema (corpo rigido + massa m) <u>non si conserva</u> a causa delle forze esterne: attrito statico e forza di gravità sulla massa m.
2*c*) Il momento angolare del corpo rigido rispetto al punto di contatto <u>non si conserva</u> a causa del momento esercitato dalla tensione della fune.
2*d*) L'energia totale del corpo rigido <u>non si conserva</u> a causa del lavoro compiuto dalla forza di tensione della fune.
2*e*) L'energia totale del sistema (corpo rigido + massa m) <u>si conserva</u> perché l'unica forza il cui lavoro non è nullo è la forza di gravità agente sulla massa m, che per definizione è conservativa. Il lavoro della forza d'attrito statico è per definizione nullo ed il lavoro totale della forza di tensione (interna) è zero.

3) Scriviamo le equazioni del moto della massa m e del corpo rigido ricordando che quest'ultimo compie un moto di puro rotolamento intorno all'asse di contatto e che la corda non slitta rispetto al cilindro interno. Quest'ultima osservazione corrisponde al fatto che la velocità periferica del punto del cilindro di raggio R_1 a contatto con la corda deve essere eguale alla velocità di traslazione della corda e quindi l'accelerazione tangenziale di tale punto deve essere eguale all'accelerazione della corda. Poiché la corda è inestensibile l'accelerazione della corda coincide con l'accelerazione del centro di massa del corpo rigido; inoltre, dato che la rotazione avviene attorno al punto di contatto fra il corpo rigido ed il piano, il raggio di rotazione del punto del cilindro di raggio R_1 a contatto con la corda è $(R_1 + R_2)$. Otteniamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} m\vec{a}_m = m\vec{g} + \vec{T} \\ \left(\vec{R}_1 + \vec{R}_2\right) \wedge \vec{T} = I_P\vec{\alpha} \\ \vec{a}_m = \vec{\alpha} \wedge \left(\vec{R}_1 + \vec{R}_2\right) \end{cases} \tag{3}$$

La seconda equazione del sistema (3) è l'equazione di rotazione del corpo rigido (seconda equazione cardinale della meccanica) rispetto all'asse di contatto con il piano. Inseriamo un sistema di assi cartesiani in cui il moto di traslazione del corpo rigido avviene lungo l'asse $\hat{x}$ (orientato verso destra), l'asse $\hat{y}$ è orientato verso l'alto e l'asse $\hat{z}$, attorno a cui avviene la rotazione del corpo rigido, esce dal foglio. Il sistema (3) assume la forma:

$$\begin{cases} -ma_m = T - mg \quad \Rightarrow a_m = g - \frac{T}{m} \\ (R_1 + R_2)T = I_P\alpha \quad \Rightarrow \frac{5RT}{2} = \frac{19\,MR^2}{2}\alpha \\ a_m = \alpha(R_1 + R_2) = \frac{5R}{2}\alpha \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo la terza equazione nella seconda e semplificando si ha:

$$\frac{5RT}{2} = \frac{19\,MR^2}{2}\frac{2a_m}{5R} = \frac{19\,MRa_m}{5} \qquad \Rightarrow T = \frac{38\,Ma_m}{25} \tag{5}$$

Inserendo quindi la (5) nella prima equazione del sistema (3) si ottiene:

$$a_m = g - \frac{T}{m} = g - \frac{38\,Ma_m}{25m} \quad \Rightarrow a_m\left(1 + \frac{38\,M}{25m}\right) = a_m\left(\frac{25m+38\,M}{25m}\right) = g \tag{6}$$

L'accelerazione del corpo di massa m è quindi:

$$a_m = g\left(\frac{25m}{25m+38\,M}\right) = g\left(\frac{1}{1+\frac{38\,M}{25\,m}}\right) \tag{7}$$

La tensione della fune si ricava sostituendo la (7) nella (5):

$$T = \frac{38\,Ma_m}{25} = \frac{38\,M}{25}\left(\frac{g}{1+\frac{38\,M}{25\,m}}\right) = \frac{38\,M}{25m}\left(\frac{mg}{1+\frac{38\,M}{25\,m}}\right) = \left(\frac{mg}{1+\frac{25m}{38M}}\right) \tag{8}$$

4) Per determinare il minimo coefficiente di attrito statico occorre utilizzare la prima equazione cardinale applicata al moto del corpo rigido:

$$(M_1 + M_2)\vec{a}_{CM} = 3M\vec{a}_{CM} = \vec{T} + \vec{F}_A \tag{9}$$

dove $\vec{F}_A$ è la forza di attrito statico. L'accelerazione $\vec{a}_{CM}$ si ricava notando che il centro di massa compie una rotazione rispetto all'asse di contatto di raggio R_2; pertanto, ricordando la terza equazione del sistema (4) si ha:

$$a_{CM} = \alpha R_2 = \frac{a_m R_2}{(R_1+R_2)} = \frac{3a_m}{5} \tag{10}$$

Sostituendo nella (9) e proiettando sul sistema di riferimento definito in precedenza si ha:

$$\left(\left(\frac{3}{5}\right)\frac{3Mg}{\left(1+\frac{38\,M}{25\,m}\right)}\right) = T - F_A \;\Rightarrow F_A = T - \left(\left(\frac{9}{5}\right)\frac{Mg}{1+\frac{38\,M}{25\,m}}\right) = \left(\frac{mg}{1+\frac{25m}{38M}}\right) - \left(\left(\frac{9}{5}\right)\frac{Mg}{1+\frac{38\,M}{25\,m}}\right) =$$
$$\left(\frac{38Mmg-45Mmg}{25\,m+38\,M}\right) = -\left(\frac{7mMg}{25\,m+38\,M}\right) \tag{11}$$

Il segno negativo indica che, rispetto al sistema di assi scelto, la forza di attrito è diretta in verso opposto a quello assegnato, cioè è nel verso delle x positive.
La reazione normale del piano è eguale ed opposta al peso del corpo rigido, cioè:

$$\vec{N} = -(M_1 + M_2)\vec{g} \quad \Longrightarrow N = |\vec{N}| = 3Mg \tag{12}$$

La condizione sul coefficiente di attrito statico μ_s necessario per produrre il moto di puro rotolamento è quindi:

$$\mu_s N \geq |F_A| \quad \Longrightarrow \mu_s \geq \frac{|F_A|}{N} = \left(\frac{7mMg}{25\,m+38\,M}\right)\frac{1}{3Mg} = \left(\frac{7m}{75\,m+114\,M}\right) \tag{13}$$

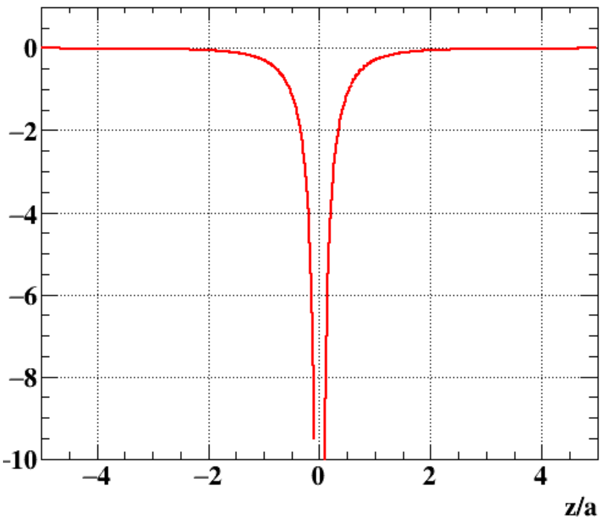
Esercizio 2

1) Applichiamo il principio di sovrapposizione: il potenziale nel punto generico P a quota z è dato dalla sovrapposizione dei potenziali dovuti alla carica puntiforme $-nq$ al centro della distribuzione e delle n cariche puntiformi q sull'anello. La distanza del punto P dalla carica nell'origine è z (più correttamente $|z|$, visto che è la stessa anche se la quota è negativa e la distanza è per definizione una quantità positiva), mentre quella delle cariche sull'anello è $\sqrt{z^2 + a^2}$, per cui il potenziale elettrostatico sull'asse della distribuzione è:

$$V(0,0,z) = -\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right) \tag{14}$$

La (14) mostra chiaramente che il potenziale è una funzione pari della distanza, cioè assume lo stesso valore in posizioni sull'asse simmetriche rispetto al piano della distribuzione. Il grafico qualitativo è mostrato nella Figura a fianco, in funzione di (z/a).

2) Il campo elettrico si determina dalla (14) calcolandone il gradiente cambiato di segno. In linea di principio sarebbe necessario determinare il potenziale anche in punti fuori dall'asse, calcolare il gradiente in una posizione generica (x, y, z) e poi sostituire in questa espressione $x = y = 0$. Tuttavia la simmetria ci assicura che in un punto P sull'asse il campo elettrico è diretto lungo z: infatti esso è dovuto alla sovrapposizione del campo della carica, che è diretto lungo la congiungente di P con la carica e quindi lungo z, e delle n cariche disposte lungo l'anello, i cui campi in direzioni ortogonali all'asse si annullano a coppie. In definitiva quindi è sufficiente calcolare il gradiente in direzione z:



$$\vec{E}(0,0,z) = -\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\right] = -\hat{z}\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z^2}\,\mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right) \tag{15}$$

dove $\mathrm{sgn}(z)$ è la funzione "segno" che vale $+1$ per $z > 0$ e -1 per $z < 0$. Per z positive la parentesi è positiva, per cui il campo è diretto come $-\hat{z}$ mentre per z negative è negativa, per cui il campo è diretto come $+\hat{z}$; in entrambi i casi quindi il campo punta verso la carica negativa. Come implicito nella (15) la componente z del campo è una funzione dispari di z, risultato prevedibile essendo il potenziale una funzione pari.

3) Nel limite di $z \ll a$ i radicali della (14) e della (15) tendono rispettivamente a $1/a$ e $1/a^3$, cioè a due grandezze finite, mentre il primo addendo diverge sia nella (14) che nella (15). In altre parole sopravvive solo il primo termine ed il campo ed il potenziale sono dominati, come prevedibile, dalla carica negativa $-nq$ che è molto vicina al punto P. Per ricavare i limiti a grande distanza della (14) e della (15) occorre sviluppare in serie di Taylor al primo ordine i radicali delle due formule:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{|z|\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}} \approx \frac{1}{|z|\left(1+\frac{a^2}{2z^2}\right)} \approx \frac{1}{|z|}\left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right) \quad \Longrightarrow \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \approx \frac{1}{|z|}\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right)\right] = \frac{1}{|z|}\frac{a^2}{2z^2} \tag{16}$$

$\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{z}{\left[z^2\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)\right]^{3/2}} = \frac{z}{z^2|z|\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{3/2}} \approx \frac{1}{z^2}\ \mathrm{sgn}(z)\frac{1}{\left(1+\frac{3a^2}{2z^2}\right)} \approx \frac{1}{z^2}\ \mathrm{sgn}(z)\left(1-\frac{3}{2}\frac{a^2}{z^2}\right) \quad \Longrightarrow \left(\frac{1}{z^2}\ \mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \approx \frac{1}{z^2}\ \mathrm{sgn}(z)\left[1-\left(1-\frac{3}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{a^2}{z^4}\mathrm{sgn}(z)$ (17)

Sostituendo le espressioni approssimate (16) e (17) nella (14) e nella (15) otteniamo rispettivamente:

$$V(0,0,z) = -\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right) \approx -\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|z|}\frac{a^2}{2z^2} = -\frac{nq}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{|z|^3} \tag{18}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = -\hat{z}\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z^2}\ \mathrm{sgn}(z) - \frac{z}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \approx -\hat{z}\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2}\frac{a^2}{z^4}\mathrm{sgn}(z) = -\hat{z}\frac{3nq}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{z^4}\mathrm{sgn}(z) \tag{19}$$

Possiamo notare che il potenziale elettrico dipende dall'inverso del cubo della distanza ed il campo elettrico dall'inverso della quarta potenza della distanza: queste dipendenze sono più forti di quelle del potenziale e del campo sia di una carica puntiforme (rispettivamente inverso della prima e della seconda potenza) sia di un dipolo elettrico (rispettivamente inverso della seconda e terza potenza della distanza). La distribuzione è per costruzione a carica totale zero; inoltre una qualsiasi delle cariche positive $+q$ sull'anello forma un dipolo elettrico con una delle n cariche negative $-q$ che costituiscono la carica al centro. Questi n dipoli sono disposti a raggiera ed orientati verso l'anello, per cui per simmetria il dipolo totale della distribuzione è zero. Il potenziale ed il campo della distribuzione devono quindi avere una dipendenza dalla distanza più forte anche di quella di un dipolo.

4) Consideriamo una coppia di cariche q sull'anello poste in posizioni simmetriche, cioè agli estremi di un diametro. Quando la carica negativa è nell'origine le due cariche esercitano su di essa due forze eguali ed opposte, per cui la forza risultante è zero. Questo ragionamento può essere ripetuto per qualsiasi coppia di cariche positive poste simmetricamente sull'anello rispetto al centro, per cui la forza totale sulla carica $-nq$ è zero e l'origine è una posizione di equilibrio. Assumiamo ora che la carica negativa si sposti di un piccolo tratto, per esempio nella direzione delle z positive. La forza prodotta su $-nq$ da due cariche positive diametralmente opposte è la sovrapposizione delle forze esercitate da ciascuna di queste due cariche, che per la legge di Coulomb sono applicate su $-nq$ e dirette verso le due cariche positive. Le componenti di queste due forze in direzione z si sommano, mentre in direzione ortogonale all'asse z si annullano. La forza risultante è quindi verso il basso, per cui è di richiamo; se invece lo spostamento avviene nella direzione dell'asse z negativo, la forza è verso l'alto ed anche in questo caso tende a riportare $-nq$ nella sua posizione di equilibrio, cioè nell'origine. La posizione di equilibrio è quindi stabile.
Per piccoli spostamenti la somma delle forze delle due cariche in posizioni simmetriche è:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2\hat{z}\frac{nq^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\mathrm{sgn}(z)}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\hat{z}\frac{nq^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\mathrm{sgn}(z)}{a^3} \tag{20}$$

La (20) si applica a tutte le $(n/2)$ coppie di cariche simmetriche per cui la forza totale è:

$$\vec{F}_{tot} = \frac{n}{2}\vec{F} = -\hat{z}\frac{n^2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\mathrm{sgn}(z)}{a^3} \tag{21}$$

L'equazione del moto è quindi:

$$m\vec{a} = m\ddot{z}\hat{z} = -\hat{z}\frac{n^2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\mathrm{sgn}(z)}{a^3} \tag{22}$$

la cui soluzione è un moto armonico di periodo:

$$T = \frac{2\pi a\sqrt{4\pi\varepsilon_0 am}}{nq} \tag{23}$$