

Esercizio 1

1) Ricordiamo innanzitutto che in un conduttore bisogna sempre identificare una regione interna, in cui il campo elettrico è nullo. Quindi, indipendentemente dallo spessore delle lastre, è necessario tenere separate le due superfici di ciascuna lastra, come suggerito nel testo e nella Figura. Il sistema diventa perciò elettricamente equivalente a quattro piani carichi paralleli, uno per ogni superficie delle due lastre, per cui il campo elettrico nelle varie regioni si otterrà utilizzando il principio di sovrapposizione fra i campi prodotti da questi quattro piani. Il campo di ciascuno piano Π è dato da $\sigma(\Pi)/2\epsilon_0$ dove $\sigma(\Pi)$ è la densità di carica del piano.

Per determinare le densità di carica richieste occorrono quattro equazioni, ricavabili come segue:

i) La somma delle cariche presenti sulle due superfici di S_1 deve essere eguale alla carica totale Q , per cui:

$$\sigma_1 S + \sigma_1' S = (\sigma_1 + \sigma_1') S = Q \quad \Rightarrow (\sigma_1 + \sigma_1') = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

ii) Essendo S_2 scarica, la somma delle cariche presenti sulle due superfici di S_2 deve essere nulla; pertanto:

$$\sigma_2 S + \sigma_2' S = (\sigma_2 + \sigma_2') S = 0 \quad \Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_2' \quad (2)$$

iii) Il campo elettrico all'interno di S_1 deve essere zero. Riferendoci alla Figura a fianco ed utilizzando il principio di sovrapposizione ricaviamo:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_1' - \sigma_2 - \sigma_2'}{2\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_1 = +\sigma_1' - (\sigma_2 + \sigma_2') = \sigma_1' \quad (3)$$

avendo già sostituito la condizione (2).

iv) Analogamente alla (3) la condizione di annullamento del campo elettrico all'interno di S_2 conduce alla relazione:

$$\frac{\sigma_2' - \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_1'}{2\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow 2\sigma_2' = 2\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2' = \sigma_1 \quad (4)$$

in cui abbiamo tenuto conto sia della (2) che della (3). Sostituendo la (3) nella (1) si ha:

$$\sigma_1 = \sigma_1' = \frac{Q}{2S} \quad (5a)$$

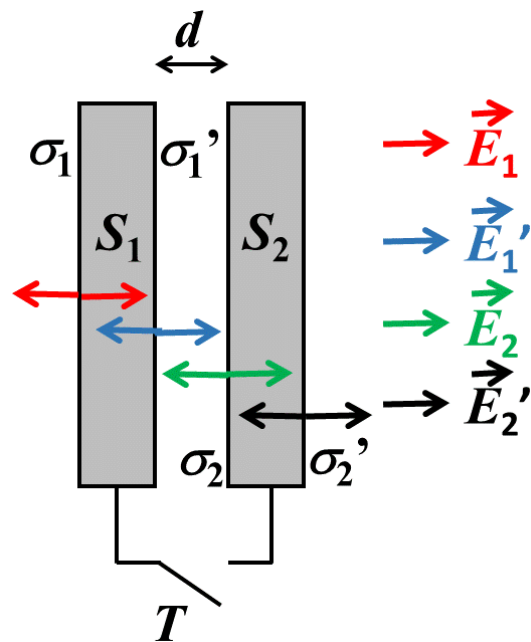
La risposta si completa tenendo conto della (2) e della (4):

$$\sigma_2' = -\sigma_2 = \frac{Q}{2S} \quad (5b)$$

2) Fissiamo un asse $\hat{x}$ positivo perpendicolare alle piastre e diretto verso destra, come usuale. Utilizzando il principio di sovrapposizione ricaviamo i campi nei punti A , B e C :

$$\vec{E}(A) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'}{2\epsilon_0} \hat{x} = -\frac{Q}{2S\epsilon_0} \hat{x} \quad (6a)$$

$$\vec{E}(B) = \frac{(\sigma_1 + \sigma_1') - (\sigma_2 + \sigma_2')}{2\epsilon_0} \hat{x} = +\frac{Q}{2S\epsilon_0} \hat{x} \quad (6b)$$



$$\vec{E}(C) = \frac{\sigma_1 + \sigma_1' + \sigma_2 + \sigma_2'}{2\varepsilon_0} \hat{x} = + \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \hat{x} \quad (6c)$$

Attraversando i conduttori dove il campo è nullo $\vec{E}$ subisce delle discontinuità in corrispondenza delle posizioni dei piani carichi, di valore pari alla densità di carica del singolo piano diviso per ε_0 .

Le densità di energia si ricavano immediatamente dalle (6):

$$u(A) = \frac{\varepsilon_0 E_A^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(-\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{Q^2}{8S^2\varepsilon_0} \quad (7a)$$

$$u(B) = \frac{\varepsilon_0 E_B^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(+\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{Q^2}{8S^2\varepsilon_0} \quad (7b)$$

$$u(C) = \frac{\varepsilon_0 E_C^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(+\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{Q^2}{8S^2\varepsilon_0} \quad (7c)$$

Poiché i moduli dei campi sono eguali, la densità di energia è la stessa nelle tre regioni. L'energia totale nella regione compresa fra le piastre si ottiene moltiplicando la densità di energia per il volume interposto, che è quello di un parallelepipedo di superficie S e altezza d :

$$U(B) = \frac{Q^2}{8S^2\varepsilon_0} \times (Sd) = \frac{Q^2 d}{8S\varepsilon_0} \quad (8)$$

dove la notazione $U(B)$ è stata utilizzata per ricordare che stiamo considerando la regione fra le lastre, dove si trova il punto B .

3) Indichiamo con Σ le nuove densità di carica, mantenendo la distinzione delle varie superfici in 1, 1', 2 e 2'. Poiché le lastre sono collegate l'equazione della conservazione della carica si applica ora al sistema delle due piastre, per cui al posto della (1) e della (2) abbiamo:

$$\Sigma_1 S + \Sigma_1' S + \Sigma_2 S + \Sigma_2' S = (\Sigma_1 + \Sigma_1' + \Sigma_2 + \Sigma_2') S = Q \quad \Rightarrow (\Sigma_1 + \Sigma_1' + \Sigma_2 + \Sigma_2') = \frac{Q}{S} \quad (9)$$

Le condizioni di annullamento dei campi all'interno dei conduttori sono valide anche adesso, ma devono essere riformulate perché la (2) non è più valida e conseguentemente neanche la forma finale della (3). Le nuove condizioni sono:

i) lastra S_1 :

$$\frac{\Sigma_1 - \Sigma_1' - \Sigma_2 - \Sigma_2'}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_1' = (\Sigma_2 + \Sigma_2') \quad (10)$$

ii) lastra S_2 :

$$\frac{\Sigma_2' - \Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_1'}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \Sigma_2' - \Sigma_2 = (\Sigma_1 + \Sigma_1') \quad (11)$$

L'ultima equazione necessaria per completare il sistema formato dalle (9), (10) e (11) si ricava osservando che la differenza di potenziale fra le due lastre adesso è nulla. Il campo elettrico fra le lastre, come sovrapposizione di campi dovuti a piani carichi, è uniforme; pertanto il suo integrale di linea nella regione compresa fra le lastre è diverso da zero tranne che nel caso in cui il campo stesso è zero. Poiché l'integrale di linea è proprio la differenza di potenziale concludiamo che la quarta condizione da imporre è che il nuovo campo in B sia nullo:

$$\vec{E}'(B) = \frac{(\Sigma_1 + \Sigma_1') - (\Sigma_2 + \Sigma_2')}{2\varepsilon_0} \hat{x} = 0 \quad \Rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_1' = (\Sigma_2 + \Sigma_2') \quad (12)$$

Sommando e sottraendo la (12) e la (10) otteniamo:

$$\Sigma_1' = 0 \quad (13a)$$

$$\Sigma_1 = (\Sigma_2 + \Sigma_2') \quad (13b)$$

Sostituendo le (13) nella (9) si ha:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_2' = 2\Sigma_1 = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \Sigma_1 = \frac{Q}{2S} \quad (14)$$

e quindi anche:

$$\Sigma_2 + \Sigma_2' = \frac{Q}{2S} \quad (15)$$

La (11), tenendo conto della (13a) e della (14), diventa:

$$\Sigma_2' - \Sigma_2 = \frac{Q}{2S} \quad (16)$$

e per confronto con la (15) otteniamo immediatamente:

$$\Sigma_2' = \frac{Q}{2S} \quad (17a)$$

$$\Sigma_2 = 0 \quad (17b)$$

In conclusione le superfici delle due lastre affacciate l'una contro l'altra sono scariche e la carica è divisa equamente fra la superficie sinistra di S_1 e la superficie destra di S_2 . I nuovi campi si ottengono sostituendo nelle (6) le densità di carica dopo la chiusura dell'interruttore:

$$\vec{E}'(A) = -\frac{\Sigma_1 + \Sigma_1' + \Sigma_2 + \Sigma_2'}{2\varepsilon_0} \hat{x} = -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \hat{x} \quad (18a)$$

$$\vec{E}'(B) = \frac{(\Sigma_1 + \Sigma_1') - (\Sigma_2 + \Sigma_2')}{2\varepsilon_0} \hat{x} = 0 \quad (18b)$$

$$\vec{E}'(C) = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_1' + \Sigma_2 + \Sigma_2'}{2\varepsilon_0} \hat{x} = +\frac{Q}{2S\varepsilon_0} \hat{x} \quad (18c)$$

I campi all'esterno del sistema delle due lastre sono quindi invariati.

4) L'unica variazione nell'energia del sistema è dovuta all'annullamento del campo nella regione fra le due lastre per cui la nuova energia in questa regione è $U'(B) = 0$. L'energia totale fra le due lastre prima della chiusura dell'interruttore è espressa dalla (8), per cui:

$$\Delta U = U'(B) - U(B) = -U(B) = -\frac{Q^2 d}{8S\varepsilon_0} \quad (19)$$

Esercizio 2

1) L'ago magnetico è soggetto ai campi prodotti dal solenoide e dalla terra. Il campo $\vec{B}_S$ del solenoide è:

$$\vec{B}_S = \mu_0 n I \hat{z} \quad (20)$$

per cui il momento totale agente sull'ago è:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times (\vec{B}_S + \vec{B}_T) \quad (21)$$

Poiché l'ago è in equilibrio il momento (21) deve essere nullo e questo si può verificare o se la parentesi tonda è nulla (e quindi i due campi sono eguali ed opposti) o se il campo risultante è parallelo a $\vec{\mu}$. Il primo caso è escluso a priori perché i due campi sono ortogonali; è quindi necessario che la componente ortogonale a $\vec{\mu}$ della somma sia zero. Abbiamo quindi:

$$B_S \cos \theta_0 - B_T \sin \theta_0 = 0 \implies B_T = \frac{B_S}{\tan \theta_0} = \sqrt{3} B_S = \sqrt{3} \mu_0 n I = 2.6 \times 10^{-5} \text{ T} \quad (22)$$

2) L'equazione del moto dell'ago, essendo una sbarretta rigida che può ruotare intorno al proprio centro di massa, è:

$$I \vec{\alpha} = \frac{mL^2}{12} \alpha \hat{z} = \vec{\tau} = \vec{\mu} \times (\vec{B}_S + \vec{B}_T) \quad (23)$$

dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare. Indichiamo con $\theta = \theta_0 + \theta'$ l'angolo formato dall'ago magnetico con l'asse $\hat{x}$. Per calcolare il prodotto vettoriale (23) scomponiamo $\vec{\mu}$ lungo gli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

$$\vec{\mu} = \mu(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \implies \vec{\mu} \times (\vec{B}_S + \vec{B}_T) = \mu(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \times (\hat{x} B_T + \hat{y} B_S) = \hat{z} \mu (B_S \cos \theta - B_T \sin \theta) = \hat{z} B_S \mu (\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) \quad (24)$$

dove è stata sostituita la (22). Inserendo ora l'angolo θ' e ricordando che $\theta_0 = 30^\circ$ otteniamo:

$$(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) = \left(\left(\frac{\sqrt{3} \cos \theta'}{2} - \frac{\sin \theta'}{2} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{\cos \theta'}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin \theta'}{2} \right) \right) = -2 \sin \theta' \quad (25)$$

L'equazione del moto diventa quindi:

$$\frac{mL^2}{12} \alpha \hat{z} = \frac{mL^2}{12} \ddot{\theta} \hat{z} = \frac{mL^2}{12} \ddot{\theta}' \hat{z} = -2 \sin \theta' B_S \mu \hat{z} \quad (26)$$

Nel caso di piccole oscillazioni, approssimando $\sin \theta' \approx \theta'$, si ottiene:

$$\frac{mL^2}{12} \ddot{\theta}' = -2 \theta' B_S \mu \implies \ddot{\theta}' = - \left(\frac{24 B_S \mu}{mL^2} \right) \theta' = -\omega^2 \theta' \quad (27)$$

da cui si ottiene il periodo di oscillazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 12.9 \text{ s} \quad (28)$$

3) Se l'ago è allineato con il campo magnetico terrestre l'espressione (23) diventa:

$$\vec{\mu} \times (\vec{B}_S + \vec{B}_T) = \mu \hat{x} \times (\hat{x} B_T + \hat{y} B_S) = \mu B_S \hat{z} \quad (29)$$

Per mantenere l'ago in questa posizione occorre quindi fornire all'ago un momento eguale ed opposto $\vec{M}$:

$$\vec{M} = -\mu B_S \hat{z} = -6.6 \times 10^{-4} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 12 \times 10^{-3} \hat{z} \text{ Nm} = -9.95 \times 10^{-9} \hat{z} \text{ Nm} \quad (30)$$

4) L'energia dell'ago quando è allineato con $\vec{B}_T$ è:

$$U = -\vec{\mu} \cdot (\vec{B}_S + \vec{B}_T) = -\mu \hat{x} \cdot (\hat{x} B_T + \hat{y} B_S) = -\mu B_T \quad (31)$$

Quando l'ago viene ribaltato la sua energia cambia segno per cui il lavoro necessario è

$$\mathcal{L} = U_f - U_i = \mu B_T - (-\mu B_T) = 2\mu B_T = 2 \times 6.6 \times 10^{-4} \times 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 3.4 \times 10^{-8} \text{ J} \quad (32)$$