Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 21/02/2019

Esercizio 1

1) Sulla pallina agiscono la forza peso $m\vec{g}$ in direzione verticale e la forza di reazione $\vec{T}$ della guida, che essendo liscia è diretta perpendicolarmente alla superficie della guida ed è quindi centripeta. Scegliendo un sistema di coordinate polari centrato in O, le componenti radiale e tangenziale delle forze agenti sulla pallina si possono esprimere come:

$$F_r = -T + mg\sin\theta\,; \quad F_\theta = +mg\cos\theta \tag{1}$$

Poiché entrambe le componenti della forza risultante sulla pallina sono non nulle, la quantità di moto della pallina stessa non si conserva. Parimenti non si conserva il momento angolare della pallina rispetto al centro della conca in quanto il momento meccanico dovuto alla forza tangenziale è diverso da zero: la forza tangenziale è infatti ortogonale al raggio vettore, che per definizione coincide con $\vec{R}$. L'energia meccanica totale invece si conserva in quanto la forza di gravità è conservativa e la reazione normale non compie lavoro.

Poiché la pallina è soggetta ad una forza variabile nel tempo che ha sia componente radiale che tangenziale, il suo moto non può essere né circolare uniforme (la forza tangenziale produce un'accelerazione angolare) né uniformemente accelerato. La conservazione dell'energia meccanica assicura che il moto è periodico: infatti la pallina parte con velocità nulla dal punto A, accelera raggiungendo la velocità massima in Q, risale la conca rallentando ed infine giunge con velocità nulla nel punto B che si trova alla stessa quota del punto A. Il moto tuttavia non è armonico: infatti la caratteristica del moto armonico è che l'accelerazione (lineare o angolare) deve essere proporzionale alla corrispondente variabile cinematica (coordinata lineare o angolo), di cui l'accelerazione stessa è la derivata seconda rispetto al tempo. In questo caso la forza tangenziale, che determina l'accelerazione angolare, è proporzionale a $\cos\theta$, per cui la condizione necessaria per produrre un moto armonico non è verificata.

2) È ovviamente possibile calcolare la reazione nei quattro punti separatamente, ma per completezza risolviamo il problema nel punto generico P e poi applichiamo questo risultato ai punti A, B e Q scegliendo il valore dell'angolo θ corrispondente. L'equazione del moto della pallina in forma vettoriale è:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_\theta) = m\left(-\frac{V^2(\theta)}{R}\hat{R} + \vec{a}_\theta\right) = (-T + mg\sin\theta)\hat{R} + mg\cos\theta\,\hat{\theta} \tag{2}$$

Dalla parte radiale della (2) si ottiene quindi:

$$T(\theta) = m\left(g\sin\theta + \frac{V^2(\theta)}{R}\right) \tag{3}$$

Per determinare $V^2(\theta)$ sfruttiamo la conservazione dell'energia meccanica fra il punto iniziale A ed il punto generico P. Ponendo lo zero dell'energia potenziale in corrispondenza del punto Q (cioè per $\theta = \pi/2$) si ha:

$$E_A = K_A + U_A = 0 + mgR = E_P = K_P + U_P = \frac{m}{2}V^2(\theta) + mgR(1 - \sin\theta) \tag{4}$$

da cui si ottiene:

$$V^2(\theta) = 2gR\sin\theta \tag{5}$$

Sostituendo nella (3) si ricava la reazione della guida per un generico valore di θ:

$$T(\theta) = m\left(g\sin\theta + \frac{2gR\sin\theta}{R}\right) = 3mg\sin\theta \tag{6}$$

I punti A, B e Q corrispondono rispettivamente a $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = \pi/2$, per cui:

$$T_A = 0; \quad T_B = 0; \quad T_Q = 3mg \tag{7}$$

3) La pallina segue una traiettoria circolare a contatto con la conca, per cui la sua velocità è puramente tangenziale ed il suo spostamento infinitesimo in funzione dell'angolo θ si esprime nella forma:

$$d\vec{s} = Rd\theta\,\hat{\theta} \tag{8}$$

L'espressione della forza di attrito dinamico si ricava dalla (6) ricordando che per definizione il suo modulo è pari a quello della reazione normale moltiplicato per il coefficiente di attrito dinamico e la sua direzione è opposta a quella della velocità. Dunque:

$$\vec{F}_d = -\hat{\theta}\mu_d\left|\vec{T}(\theta)\right| = -3\mu_d mg\sin\theta\ \hat{\theta} \tag{9}$$

Il lavoro dissipativo compiuto dalla forza di attrito dinamico quando la pallina percorre l'intera conca è quindi:

$$\mathcal{L} = \int_0^\pi\left(-3\mu_d mg\sin\theta\ \hat{\theta}\right)\cdot\left(Rd\theta\,\hat{\theta}\right) = -3\mu_d mgR\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = -6\mu_d mgR \tag{10}$$

Poiché i punti A e B hanno la stessa altezza e quindi la stessa energia potenziale, per poter giungere in B la pallina deve avere un'energia cinetica minima tale da compensare il lavoro (10), ovvero:

$$K_{min} = \frac{mV_0^2}{2} = -\mathcal{L} = +6\mu_d mgR \quad \Rightarrow V_0 = \sqrt{12\mu_d gR} \tag{11}$$

4) La velocità della prima pallina nel punto Q si ottiene applicando la conservazione dell'energia fra A e Q con la condizione di velocità iniziale non nulla:

$$E_A = K_A + U_A = \frac{m}{2}{V_0'}^2 + mgR = E_Q = K_Q + U_Q = \frac{m}{2}V^2(Q) + 0 \tag{12}$$

da cui:

$$V^2(Q) = {V_0'}^2 + 2gR \tag{13}$$

Nell'istante dell'urto con la seconda pallina la velocità della prima è orizzontale e non essendo presenti forze impulsive in direzione orizzontale la quantità di moto in tale direzione si conserva. Pertanto, detta V la velocità comune delle due palline dopo l'urto si ottiene:

$$mV(Q) = 2mV \quad \Rightarrow V = \frac{V(Q)}{2} \tag{14}$$

Applicando nuovamente la conservazione dell'energia fra i punti Q e B e tenendo conto del fatto che la velocità V_0' minima è quella che consente alle due palline di giungere in B con velocità nulla si ha:

$$E_Q = K_Q + U_Q = \frac{2m}{2}V^2 + 0 = E_B = K_B + U_B = 0 + 2mgR \qquad (15)$$

da cui:

$$V^2 = 2gR \quad \Longrightarrow V^2(Q) = 8gR \qquad (16)$$

Sostituendo nella (13) si ha infine:

$$V_0' = \sqrt{V^2(Q) - 2gR} = \sqrt{6gR} \qquad (17)$$

Esercizio 2

1) I gusci sferici sono composti di materiale conduttore per cui le cariche si dispongono sulle superfici interne ed esterne in modo che il campo elettrico nelle regioni di spazio con $a < r < b$ ed $c < r < d$ sia nullo. Data la simmetria dei conduttori questo significa che su tutte le superfici la densità di carica è uniforme e con carica totale pari a Q_0 per $r = b, d$ e pari a $-Q_0$ per $r = c$. Sulla superficie che si trova in $r = a$ la carica totale è nulla. Il campo elettrico è pertanto:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \quad r < b;\ c < r < d \\ \frac{Q_0 \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\ b < r < c; r > d \end{cases} \qquad (18)$$

2) Quando la regione tra i due gusci sferici viene riempita di sostanza di resistività ρ all'interno del materiale si origina una densità di corrente pari a:

$$\vec{J}(t) = \frac{\vec{E}(t)}{\rho} = \frac{Q_b(t)\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0\, \varepsilon_r \rho r^2} \qquad (19)$$

Nel seguito indicheremo con $Q(t)$ la carica disposta sul guscio sferico di raggio b tralasciando il pedice b. La corrente che scorre dal guscio di raggio b verso l'esterno può quindi essere scritta come:

$$I(t) = \vec{J} \cdot \vec{S} = J4\pi r^2 = \frac{Q(t)}{\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r} \qquad (20)$$

Essendo:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad (21)$$

si ottiene:

$$\frac{Q(t)}{\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r} = -\frac{dQ}{dt} \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r} \ \Longrightarrow\ I(t) = \frac{Q_0 e^{-t/\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r}}{\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r} \qquad (22)$$

3) L'energia dissipata per effetto Joule può essere calcolata come:

$$E_{diss} = \int_0^\infty RI^2 dt = R\left(\frac{Q_0}{\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r}\right)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\rho\varepsilon_0}\, dt = \frac{RQ_0{}^2}{2\rho\varepsilon_0\, \varepsilon_r} = \frac{Q_0{}^2}{8\pi\varepsilon_0\, \varepsilon_r}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \qquad (23)$$

4) La densità di energia del campo elettrico è pari a:

$$u_e = \frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r\, E^2}{2} \tag{24}$$

Inizialmente (formula (18)) il campo elettrico è diverso da zero nelle regioni $b < r < c$ e $r > d$. Quando si raggiunge la nuova situazione stazionaria il campo elettrico per $r > d$ è rimasto invariato mentre nella regione $b < r < c$ il campo è nullo. Pertanto la variazione di energia si può calcolare come l'energia dovuta alla presenza di un campo elettrico nella regione $b < r < c$:

$$E_{ele} = \int_b^c \frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r\, E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r}{2} \int_b^c \frac{{Q_0}^2}{4\pi(\varepsilon_0\, \varepsilon_r\,)^2\, r^2} dr = \frac{{Q_0}^2}{8\pi\varepsilon_0\, \varepsilon_r} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \tag{25}$$

La variazione di energia è quindi uguale all'energia dissipata per effetto Joule calcolata nel punto precedente, come si voleva dimostrare.

Facoltativo:
La resistenza totale del guscio sferico di materiale resistivo può essere calcolata considerando che la resistenza infinitesima di uno spicchio di materiale di spessore dr e superficie dS è: $dR = \rho dr/dS$. Se ora consideriamo molti spicchi consecutivi infinitesimi a raggio r fissato possiamo descriverli come tante resistenze infinitesime poste in parallelo e quindi la resistenza equivalente dR_g di questo guscio di spessore dr sarà data dalla relazione:

$$\frac{1}{dR_g} = \int \frac{dS}{\rho dr} = \frac{4\pi r^2}{\rho dr} \rightarrow dR_p = \frac{\rho dr}{4\pi r^2} \tag{26}$$

Possiamo quindi calcolare la resistenza R di un guscio di spessore $(c - b)$ considerando la serie di molti gusci di spessore dr:

$$R = \int_b^c \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \tag{27}$$