Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 01/02/2019

Esercizio 1

1) Sull'uomo agiscono la forza di gravità, la reazione della scala e le sue forze muscolari, mentre sulla scala agiscono la forza di gravità, la reazione del pavimento e la reazione dell'uomo.

La quantità di moto dell'uomo non si conserva, visto che la somma delle forze agenti sull'uomo non è zero.

La quantità di moto del sistema uomo+scala si conserva per la componente orizzontale e non si conserva per la componente verticale: infatti la somma delle forze sulla scala e sull'uomo in direzione orizzontale è zero, per cui la componente orizzontale della quantità di moto totale si conserva, mentre in direzione verticale la somma delle forze è zero sulla scala, ma non sull'uomo, per cui la componente verticale della quantità di moto totale non si conserva.

L'energia totale del sistema non si conserva a causa del lavoro della forza muscolare dell'uomo.

2) Come abbiamo osservato la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema si conserva nel sistema inerziale solidale al pavimento. Poiché all'istante $t = 0$ l'uomo è fermo, la quantità di moto totale è nulla ed in direzione orizzontale si mantiene nulla. Pertanto ad un istante generico la componente orizzontale della velocità dell'uomo v_x e quella della scala V_x sono legate dalla relazione:

$$mv_x + MV_x = 0 \quad \Rightarrow v_x = -\frac{M}{m}V_x \tag{1}$$

D'altra parte una relazione analoga vale anche per le componenti orizzontali delle accelerazioni, che indichiamo con a_x (uomo) e con A_x (scala). Infatti:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{M}{m}V_x\right) = -\frac{M}{m}\frac{dV_x}{dt} = -\frac{M}{m}A_x \tag{2}$$

Nel sistema non inerziale solidale con la scala si muove ovviamente solo l'uomo, con l'accelerazione di modulo a', le cui componenti sono rispettivamente:

$$\begin{cases} a'_x = -a'cos\vartheta = -a'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a'_y = -a'sen\vartheta = -a'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Se ora applichiamo la legge di composizione delle accelerazioni lungo l'asse x otteniamo:

$$a_x = -\frac{M}{m}A_x = a'_x + A_x \quad \Rightarrow A_x\left(1 + \frac{M}{m}\right) = A_x\left(\frac{m+M}{m}\right) = -a'_x = a'\cos\vartheta = a'\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow A_x\left(\frac{m+M}{m}\right) = a'\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad A_x = a'\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right) = 0.118\ \mathrm{m/s^2} \tag{4}$$

nel verso positivo dell'asse x. Per quanto riguarda l'uomo si ottiene, nel sistema inerziale:

$$a_x = -\frac{M}{m}A_x = -5 \times 0.118\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = -0.59\ \mathrm{m/s^2} \tag{5}$$

In direzione verticale bisogna considerare che si muove solo l'uomo, per cui l'accelerazione di trascinamento in direzione verticale è zero e quindi:

$$a_y = a'_y = -a'\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\ \mathrm{m/s^2} \tag{6}$$

In conclusione:

$$\vec{A} = (0.118 \text{ m/s}^2, 0); \quad \vec{A}' = (0,0); \quad \vec{a} = (-0.59, -0.707) \text{ m/s}^2; \quad \vec{a}' = (-0.707, -0.707) \text{ m/s}^2 \tag{7}$$

Poiché le accelerazioni sono costanti il moto, sia nel sistema inerziale che in quello non inerziale, è uniformemente accelerato. Otteniamo quindi per l'uomo:

$$\begin{cases} \vec{v} = (v_x, v_y) = \left(-a'\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right)t, -a'\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \\ \vec{v}' = (v_x', v_y') = \left(-a'\frac{\sqrt{2}}{2}t, -a'\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \end{cases} \tag{8}$$

e per la scala:

$$\begin{cases} \vec{V} = (V_x, V_y) = \left(+a'\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)t, 0\right) \\ \vec{V}' = (V_x', V_y') = (0,0) \end{cases} \tag{9}$$

3) La legge del moto dell'uomo nel sistema inerziale si ottiene integrando la prima riga del sistema (8) tenendo conto della posizione iniziale. Poiché all'istante $t = 0$ l'uomo si trova in cima alla scala, la sua posizione iniziale, misurata dal punto 0 nella figura del testo, è:

$$(x_0, y_0) = \left(l\frac{\sqrt{2}}{2}, l\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tag{10}$$

per cui:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{M}{m+M}\right)t^2 = l\frac{\sqrt{2}}{2} - a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{M}{m+M}\right)t^2 \\ y(t) = y_0 - a'\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 = l\frac{\sqrt{2}}{2} - a'\frac{\sqrt{2}}{4}t^2 \end{cases} \tag{11}$$

Per quanto riguarda la scala la posizione iniziale non è particolarmente rilevante, in quanto la scala stessa trasla rigidamente per cui è sufficiente scegliere un punto qualsiasi della scala e studiare la legge del moto di tale punto. Il "candidato naturale" è il punto della scala che a $t = 0$ coincide con l'origine, per cui:

$$(X_0, Y_0) = (0,0) \tag{12}$$

Integrando le (9) si ottiene quindi:

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{m}{m+M}\right)t^2 = a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{m}{m+M}\right)t^2 \\ Y(t) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

L'uomo giunge a terra nell'istante t^* in cui $y(t^*) = 0$. Pertanto:

$$y(t^*) = l\frac{\sqrt{2}}{2} - a'\frac{\sqrt{2}}{4}t^{*2} = 0 \qquad \Longrightarrow t^* = \sqrt{\frac{2l}{a'}} \tag{14}$$

Sostituendo nella prima delle (11) si ricava:

$$x(t^*) = l\frac{\sqrt{2}}{2} - a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{M}{m+M}\right)t^{*2} = l\frac{\sqrt{2}}{2} - a'\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{M}{m+M}\right)\frac{2l}{a'} = l\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{M}{m+M}\right) = l\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right) = 0.47\text{ m} \tag{15}$$

Si noti che se la massa della scala è "infinita" (che corrisponde ad una scala fissata al terreno) $x(t^*) = 0$ come intuitivo (l'uomo giunge al piede della scala).
La velocità dell'uomo al termine della discesa si ottiene sostituendo t^*nella prima riga del sistema (8):

$$\vec{v}(t^*) = \left(-a'\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right)t^*, -a'\frac{\sqrt{2}}{2}t^*\right) = \left(-\sqrt{la'}\left(\frac{M}{m+M}\right), -\sqrt{la'}\right) = (-1.67, -2)\text{ m/s} \tag{16}$$

Il modulo della velocità dell'uomo è quindi:

$$\vec{v}(t^*) = \sqrt{\left[-\sqrt{la'}\left(\frac{M}{m+M}\right)\right]^2 + \left[-\sqrt{la'}\right]^2} = \sqrt{la'}\sqrt{\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 + 1} = 2.6\text{ m/s} \tag{17}$$

e quello della velocità della scala è, sfruttando la (1):

$$V(t^*) = \left|-\frac{m}{M}\vec{v}(t^*)\right| = 2.6 \times \frac{60}{300}\text{ m/s } = 0.33\text{ m/s} \tag{18}$$

4) Il lavoro svolto dalle forze agenti sull'uomo è pari alla differenza di energia meccanica fra l'istante finale e quello iniziale:

$$\mathcal{L} = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = \left(\frac{m}{2}v^2(t^*) + \frac{M}{2}V^2(t^*) + 0\right) - (0 + mgy_0) = -1444\text{ J} \tag{19}$$

Esercizio 2

Data la simmetria della distribuzione di carica di una lastra carica uniformemente, il campo elettrico prodotto dalla lastra caricata positivamente sarà parallelo all'asse $\hat{x}$. Sempre per questioni di simmetria il campo elettrico esterno alla lastra a destra ed a sinistra della lastra hanno versi opposti. Consideriamo ora il sistema di riferimento mostrato in Figura 1. Per determinare il campo elettrico possiamo applicare la legge di Gauss utilizzando una superficie cilindrica di sezione di base S posta con l'asse parallelo a x e le basi all'esterno o all'interno della lastra in posizione simmetrica ed ottenere:

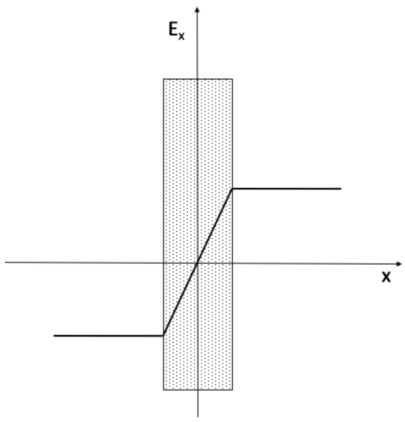

Figura 1

$$x < -\frac{d}{2} \quad \vec{E} = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{x} \tag{20a}$$
$$x > \frac{d}{2} \quad \vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{x} \tag{20b}$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad \vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}\hat{x} \tag{20c}$$

Il grafico dell'andamento del campo elettrico in funzione di x è mostrato in Figura 1.

2) Il campo elettrico prodotto dalle due lastre in tutto lo spazio può essere scritto come somma dei campi elettrici prodotti dalle due lastre. Scegliamo un sistema di riferimento come in Figura 2, in cui i centri delle lastre si trovano rispettivamente in $x = -\frac{3}{2}d$ ed in $x = \frac{3}{2}d$. Le formule ricavate nel punto precedente si possono immediatamente adattare inserendo l'opportuna traslazione di $\pm\frac{3}{2}d$. Si ottiene quindi:

$$x < -2d \quad \vec{E} = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{x} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{x} = 0 \tag{21a}$$

$$-2d < x < -d \quad \vec{E} = \left[\frac{\rho\left(x+\frac{3}{2}d\right)}{\epsilon_0} + \frac{\rho\frac{d}{2}}{\epsilon_0}\right]\hat{x} = \frac{\rho(x+2d)}{\epsilon_0}\hat{x} \tag{21b}$$

$$-d < x < d \quad \vec{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0}\,\hat{x} \tag{21c}$$

$$d < x < 2d \quad \vec{E} = \frac{\rho(2d-x)}{\epsilon_0}\hat{x} \tag{21d}$$

$$x > 2d \quad \vec{E} = 0 \tag{21e}$$

In Figura 2 è mostrato l'andamento del campo elettrico in tutto lo spazio in funzione della coordinata x.

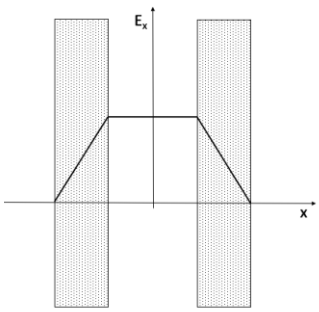

Figura 2

3) Per calcolare la velocità minima necessaria affinché la carica possa sfuggire verso $x \to +\infty$ si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -q[V(x=0) - V(x=2d)] = -q\Delta V \tag{22}$$

dove

$$\Delta V = -\int_0^{2d} \vec{E}\cdot d\hat{x} = -\int_0^{d} \frac{\rho d}{\epsilon_0}dx - \int_d^{2d} \frac{\rho(2d-x)}{\epsilon_0}dx = -\frac{3\rho d^2}{2\epsilon_0} \tag{23}$$

Dalla (22) si ottiene:

$$v^2 = \ \Longrightarrow v = d\sqrt{\frac{3\rho q}{m\epsilon_0}} \tag{24}$$

4) Le lastre in movimento producono una distribuzione di correnti, la cui simmetria implica che il campo magnetico sia diretto parallelamente all'asse z, definito in modo da formare una terna destrorsa con gli assi x

e y mostrati nelle Figure 1 e 2. Applicando la legge di Ampere alle correnti di una singola lastra si ottiene che il campo magnetico prodotto esternamente alla distribuzione di carica ha intensità:

$$|\overrightarrow{B}| = -\frac{\rho v_p d\mu_0}{2} \tag{25}$$

ed è diretto in verso opposto a $\hat{z}$ a destra del piano e nello stesso verso di $\hat{z}$ a sinistra del piano. Le due lastre contribuiscono quindi al campo magnetico totale con due contributi di pari intensità e concordi tra loro. Il campo totale è dunque:

$$-d < x < d \quad \vec{B} = -\rho v_p d\mu_0 \hat{z} \tag{26}$$

La forza totale subita dalla carica elettrica è quindi data dalla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = -qv\rho v_p d\mu_0 \hat{y} - q\frac{\rho d}{\epsilon_0}\,\hat{x} \tag{27}$$