Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 11/01/2019

Esercizio 1

1) Il contatto tra la molla ed il corpo di massa m viene perso quando la forza della molla cambia verso ossia quando la lunghezza della molla è pari a L_0. Utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica fra l'istante iniziale (sblocco della molla) e quando il corpo m abbandona il contatto con la molla si ottiene:

$$\frac{1}{2}kL_0^2 = \frac{1}{2}m{v_i}^2 \rightarrow v_i = L_o\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

2) L'urto è completamente anelastico per cui l'energia meccanica del sistema $M + m$ non si conserva (parte dell'energia meccanica iniziale viene infatti dissipata per tenere unito il corpo m alla sbarretta). La quantità di moto del sistema $M + m$ non si conserva in quanto la forza di reazione del vincolo è impulsiva ed avrà quindi impulso diverso da zero tra un istante immediatamente precedente e uno immediatamente successivo all'urto. Viceversa il momento angolare si conserva visto che, scegliendo come polo il vincolo P, la forza impulsiva ha momento nullo.
Per quanto riguarda i sistemi M o m separatamente: a) l'energia meccanica non si conserva in quanto l'urto è anelastico; b) la quantità di moto non si conserva perché durante l'urto agisce la forza impulsiva di contatto tra i due corpi che ha quindi un impulso durante l'urto diverso da zero e c) il momento angolare non si conserva in quanto la forza impulsiva di contatto tra i due oggetti ha un momento integrato nel tempo diverso da zero rispetto al perno P scelto come polo.

Utilizziamo un sistema di riferimento cartesiano in cui l'asse z è orientato verso l'alto, l'asse y è in direzione orizzontale ed orientato verso destra e l'asse x ha orientazione tale da formare una terna levogira. Applicando la conservazione del momento angolare si ha:

$$L_{x,i} = -mv_i d \tag{2a}$$

$$L_{x,f} = -m\omega d^2 - I\omega = -\omega\left(md^2 + \frac{Md^2}{3}\right) \tag{2b}$$

da cui si ottiene:

$$\omega = \frac{mv_i}{d\left(m+\frac{M}{3}\right)} \tag{3}$$

3) Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema $M + m$. L'angolo massimo si raggiunge quando la velocità angolare del sistema si annulla e quindi quando l'energia cinetica si è completamene convertita in energia potenziale gravitazionale:

$$\frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)gd(1 - cos\vartheta) \tag{4}$$

dove I è il momento d'inerzia della sbarretta rispetto al polo P che vale $I = \frac{1}{3}Md^2$. Dalla (4) si ottiene:

$$cos\vartheta = 1 - \frac{\omega^2 d\left(m+\frac{M}{3}\right)}{2\left(m+\frac{M}{2}\right)g} \tag{5}$$

4) L'impulso della reazione del vincolo si ricava utilizzando la variazione della quantità di moto del sistema:

$$p_{y,i} = -mv_i \tag{6a}$$
$$p_{y,f} = -m\omega d - M\omega\frac{d}{2} \tag{6b}$$

da cui:

$$\Delta I_y = p_{y,f} - p_{y,i} = -d\omega\left(m + \frac{M}{2}\right) + mv_i = mv_i\left(1 - \frac{m+\frac{M}{2}}{m+\frac{M}{3}}\right) = -\frac{1}{6}\frac{mMv_i}{\left(m+\frac{M}{3}\right)} \tag{7}$$

La reazione del vincolo impedisce alla sbarretta sia di traslare sia di ruotare intorno al centro di massa. Nel primo caso la reazione del vincolo per impedire la traslazione è diretta nel verso positivo dell'asse y mentre nel secondo caso la reazione deve essere nel verso negativo. Quando l'urto avviene nell'estremità inferiore la reazione alla rotazione è maggiore della reazione alla traslazione.

Esercizio 2

1) Poiché la coordinata x di un punto P qualsiasi dello spazio è misurata dall'asse del cilindro di sinistra, la distanza dell'asse del cilindro di destra da P è $(D - x)$. Quando si applica la d.d.p. fra i due cilindri, poiché il cilindro di sinistra si carica positivamente ed il cilindro di destra negativamente i campi generati dai due cilindri in un punto arbitrario dell'asse x nella regione compresa fra essi sono entrambi diretti verso destra, per cui si può scrivere:

$$\vec{E}(x) = \hat{x}E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\hat{x} \tag{8}$$

Il risultato (8) è valido per costruzione per $a < x < D - a$; nelle regioni $-a < x < a$ e $D - a < x < D + a$ il campo elettrico è nullo perché i cilindri sono conduttori all'equilibrio elettrostatico. Studiamo ora il campo elettrico nelle regioni a sinistra del cilindro a potenziale V_0 $(x < -a)$ ed a destra del cilindro collegato a terra $(x > D + a)$.

$x < -a$: poiché x è negativo, la distanza di un punto in questa regione dall'asse del cilindro caricato positivamente è $-x$, mentre quella dall'asse del cilindro a massa è $D + |x| = D - x$. Questa volta però i campi dovuti ai due cilindri sono discordi, in quanto il campo del cilindro mantenuto a V_0 è diretto verso le x negative e quello dovuto al cilindro collegato a terra verso le x positive. Pertanto:

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{D-x}\right)(-\hat{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\hat{x} \tag{8a}$$

che coincide formalmente con la (8) anche se, a causa del segno di x, i due termini in parentesi sono discordi.

$x > D + a$: x è positivo, ma è maggiore di D; pertanto la distanza di un punto in questa regione dall'asse del cilindro a potenziale V_0 è x e quella dall'asse del cilindro a terra è $x - D$. Anche in questo caso i campi sono discordi: il campo del cilindro a potenziale V_0 è rivolto verso le x positive, quello del cilindro a terra verso le x negative. Pertanto:

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(+\frac{1}{x} - \frac{1}{x-D}\right)\hat{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)\hat{x} \tag{8b}$$

Si verifica quindi la stessa situazione del caso precedente: la formula è formalmente identica alla (8), ma il segno negativo della differenza $(D - x)$ fa sì che i due termini nella parentesi siano discordi.

2) La differenza di potenziale ΔV fra i due cilindri si ottiene calcolando l'integrale del campo elettrico nella regione compresa fra essi, per cui è data da:

$$\Delta V = \int_a^{D-a} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x} = \int_a^{D-a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right) dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right) dx = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{D-a}\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D-a}{a}\right) \tag{9}$$

Poiché uno dei due cilindri è mantenuto al potenziale V_0 e l'altro a terra, la differenza di potenziale calcolata nella (9) è proprio V_0, per cui imponendo l'eguaglianza $\Delta V = V_0$ ed invertendo la (9) si ricava la densità lineare di carica:

$$\lambda = \frac{V_0 \pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)} \tag{10}$$

Tenendo conto della (10) possiamo riscrivere la (8) nella forma:

$$\vec{E}(x) = \frac{V_0}{2\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\hat{x} \tag{11}$$

3) Poiché conosciamo la differenza di potenziale fra i cilindri e la relazione fra quest'ultima e la densità di carica (formula (10)) abbiamo immediatamente:

$$\frac{C}{l} = \frac{Q}{lV_0} = \frac{\lambda}{V_0} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)} \tag{12}$$

La forza elettrostatica fra i due cilindri è chiaramente attrattiva perché le cariche sui cilindri sono discordi; in particolare quindi la forza che il cilindro in $x = D$ esercita su quello in $x = 0$ è diretta nel verso positivo dell'asse x ed il suo modulo si ottiene semplicemente moltiplicando la carica sul cilindro a potenziale V_0 per il campo elettrico prodotto dall'altro cilindro a distanza D dal suo asse. Tenendo conto della relazione (10) si ricava quindi:

$$\vec{F} = qE\hat{x} = \frac{\lambda l V_0}{2\ln\left(\frac{D-a}{a}\right)}\left(\frac{1}{D}\right)\hat{x} = \frac{V_0^2 \pi\varepsilon_0 l}{2\,D\ln^2\left(\frac{D-a}{a}\right)}\hat{x} \tag{13}$$

4) Supponiamo che l'asse del cilindro di sinistra sia spostato rispetto alla posizione di riposo ($x = 0$) di un tratto x nella regione compresa fra i due cilindri. La forza elettrostatica subita da questo cilindro è espressa dalla (13) con la sostituzione di D con $D - x$ nel logaritmo e nella frazione, in quanto la distanza fra gli assi dei due cilindri è $D - x$. Invece la forza elastica, dato che x coincide con l'allungamento della molla, è semplicemente $-kx\hat{x}$. In condizioni di equilibrio le due forze devono essere eguali ed opposte, per cui:

$$\frac{V_0^2 \pi\varepsilon_0 l}{2\ln^2\left(\frac{D-a-x}{a}\right)}\frac{1}{(D-x)} = kx \tag{14}$$

Trascurando la variazione di distanza nel logaritmo che dipende molto debolmente dal suo argomento (cioè utilizzando $(D - a)$ come nella (13)), la (14) può essere portata nella forma di un'equazione di secondo grado:

$$\left(\frac{x}{D}\right)\left(1-\frac{x}{D}\right) = \frac{V_0^2 \pi\varepsilon_0 l}{2\,kD^2\ln^2\left(\frac{D-a}{a}\right)} \tag{15}$$

Indicando per semplicità con C l'espressione a secondo membro otteniamo l'equazione:

$$\left(\frac{x}{D}\right)^2 - \left(\frac{x}{D}\right) + C = 0 \tag{16}$$

la cui soluzione è:

$$\frac{x}{D} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4C}}{2} \tag{17}$$

La (17) ha senso solo se $1 - 4C > 0$ ovvero se $C < 0.25$. Se si verifica questa condizione la (15) ha due soluzioni distinte, corrispondenti a due distanze di equilibrio.
In alternativa a risolvere esplicitamente la (15) si può studiare l'andamento della funzione di secondo grado a primo membro. Poiché il punto di equilibrio si deve trovare nella regione fra i due cilindri, la variabile x/D è limitata nell'intervallo $(0,1)$. Il grafico della funzione:

$$y = \left(\frac{x}{D}\right)\left(1 - \frac{x}{D}\right) \tag{18}$$

è mostrato in Figura: si noti che se l'espressione (adimensionale) a secondo membro è > 0.25 la (15) non ha soluzione, cioè il sistema non ha un equilibrio ed i cilindri giungono a contatto; viceversa per valori compresi fra 0 e 0.25 ci sono in generale due soluzioni (a titolo di esempio sono mostrate le intersezioni della (18) con la retta $y = 0.2$). Se l'applicazione della differenza di potenziale avviene in maniera graduale, il sistema raggiunge la condizione di equilibrio corrispondente alla soluzione più vicina all'origine, cioè quella che comporta un minor allungamento della molla.