**Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e TLC 14 Settembre 2018**

**Esercizio 1**

1) Per il sistema $M + m$, includendo la descrizione dell'interazione gravitazionale come energia potenziale, si conserva l'energia meccanica in quanto non si hanno forze esterne che compiono lavoro. Infatti l'unica forza esterna in questo caso è la componente ortogonale della reazione del piano di appoggio del cuneo che, essendo ortogonale allo spostamento, non compie lavoro. Per il sistema $M + m$ si conserva anche la componente orizzontale della quantità di moto in quanto non ci sono forze esterne lungo la direzione orizzontale. Per i sistemi $m$ ed $M$ separatamente invece l'energia meccanica non si conserva in quanto le forze di reazione piano-punto materiale che agiscono fra piano e punto materiale compiono lavoro. Analogamente per questi sistemi non si conserva alcuna componente della quantità di moto in quanto le forze di reazione hanno impulsi non nulli.

2) Utilizzando il fatto che si conserva l'energia meccanica ($E_{M+m}$) del sistema $M + m$ (+ interazione gravitazionale) si può scrivere la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui il punto materiale si trova ad altezza $R$ e l'istante finale in cui il punto materiale raggiunge la superficie orizzontale:

$$E_{M+m,i} = mgR \tag{1}$$

$$E_{M+m,f} = \frac{1}{2}m{v_P}^2 + \frac{1}{2}M{v_C}^2 \tag{2}$$

Combinando la (1) e la (2) si ottiene:

$$mgR = \frac{1}{2}m{v_P}^2 + \frac{1}{2}M{v_C}^2 \tag{3}$$

dove $v_P$ e $v_C$ sono rispettivamente i moduli delle velocità del punto materiale e del cuneo quando il punto materiale raggiunge la superficie orizzontale. Sfruttando la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto tra gli stessi due istanti si può scrivere:

$$p_{x,i} = 0 \tag{4a}$$
$$p_{x,f} = -Mv_C + mv_P = p_{x,i} \tag{4b}$$

da cui:

$$v_C = \frac{mv_P}{M} \tag{5}$$

Sostituendo la (5) nella (3) si ottiene:

$$v_P = \sqrt{2gR\left(\frac{M}{m+M}\right)} \tag{6}$$

3) Indichiamo con $x_C(0)$ la posizione del cuneo all'istante iniziale. Per determinare di quanto si è spostato il cuneo nell'intervallo di tempo $t$ in cui il punto materiale è sceso fino a raggiungere la superficie orizzontale, dobbiamo determinare la grandezza:

$$\Delta x_C(t) = x_C(t) - x_C(0) \tag{7}$$

Il moto del centro di massa si descrive come quello di un punto materiale di massa $M + m$ sottoposto alla risultante delle forze esterne. Come osservato nel punto 1) non ci sono forze esterne con componenti orizzontali; pertanto lungo la direzione orizzontale l'accelerazione del centro di massa è nulla. Essendo inizialmente la velocità nulla, per tutto l'intervallo di tempo $t$ si ha: $v_{x,cm} = 0$. Si può dunque scrivere:

$$x_{cm}(0) = \frac{x_P(0)m + x_C(0)M}{m+M} = \frac{x_C(0)M}{m+M} \tag{8}$$

avendo assunto $x_P(0) = 0$. All'istante $t$ analogamente:

$$x_{cm}(t) = \frac{x_P(t)m + x_C(t)M}{m+M} \tag{9}$$

Poiché la coordinata orizzontale del centro di massa non cambia si ottiene:

$$x_{cm}(0) = \frac{x_C(0)M}{m+M} = x_{cm}(t) = \frac{x_P(t)m + x_C(t)M}{m+M} \tag{10}$$

da cui, eliminando il denominatore comune:

$$x_C(0)M = x_P(t)m + x_C(t)M \qquad \Rightarrow x_C(t)M - x_C(0)M = -x_P(t)m \tag{11}$$

Confrontando la (11) con la (7) si ottiene:

$$\Delta x_C = -x_P(t)\frac{m}{M} \tag{12}$$

Quando il punto materiale arriva in fondo al cuneo il suo spostamento rispetto al cuneo è pari a $R$; si può quindi scrivere:

$$x_C(0) + x_P(t) - x_C(t) = R = x_P(t) - \Delta x_C \tag{13}$$

Dalla (13) e dalla (12) si ricava infine

$$\Delta x_C = x_P(t) - R = -\left(R + \Delta x_C \frac{M}{m}\right) \Rightarrow \Delta x_C = -\frac{mR}{m+M} \tag{14}$$

4) Durante l'intervallo di tempo in cui il punto materiale percorre la guida di raggio $r$ la seconda legge di Newton si può scrivere come:

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{15}$$

dove $\vec{a}$ è l'accelerazione del punto materiale ed $\vec{R}$ è la reazione della guida. Nel punto di massima altezza l'accelerazione ha solo componente verticale ed è quindi pari all'accelerazione centripeta dato che il punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare:

$$R + mg = m\frac{{v_f}^2}{r} \quad \Rightarrow R = m\left(-g + \frac{{v_f}^2}{r}\right) \tag{16}$$

dove $v_f$ è il modulo della velocità del punto materiale nel punto di massima altezza. Il valore di $v_f$ si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui il punto materiale inizia a percorrere la guida e l'istante in cui raggiunge la massima altezza, ovvero:

$$E_i = \frac{1}{2} m {v_i}^2 = E_f = \frac{1}{2} m {v_f}^2 + 2mgr \tag{17}$$

da cui si ottiene:

$${v_f}^2 = {v_i}^2 - 4gr \tag{18}$$

Affinché il punto materiale compia un giro completo la reazione deve sempre essere maggiore di zero (che con la nostra convenzione significa diretta verso l'interno), per cui dalla (16):

$${v_f}^2 > gr \tag{19}$$

Combinando la (19) e la (18) si ricava:

$${v_i}^2 > 5gr \tag{20}$$

ed utilizzando il valore della velocità iniziale trovata nel punto 2) (formula (6)) si ottiene infine:

$$\frac{R}{r} > \frac{5(M+m)}{2M} \tag{21}$$

**Esercizio 2**

1) Il campo elettrico generato dall'anello grande lungo il suo asse $z$ ha la forma:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda_a a z}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} \tag{22}$$

In particolare nel centro dell'anello piccolo si ha:

$$\vec{E}(z_0) = \frac{\lambda_a a z_0}{2\varepsilon_0 (a^2+{z_0}^2)^{3/2}} \hat{z} \tag{23}$$

Poiché per ipotesi il campo in tutta la regione dell'anello piccolo si può approssimare con il suo valore al centro dell'anello stesso, tutta la carica dell'anello piccolo è soggetta al campo (23) per cui, essendo $\lambda_b < 0$, la forza risultante (attrattiva) sull'anello piccolo è:

$$\vec{F}(z_0) = \frac{\lambda_a a z_0 2\pi \lambda_b b}{2\varepsilon_0 (a^2+{z_0}^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\pi a b \lambda_a \lambda_b z_0}{\varepsilon_0 (a^2+{z_0}^2)^{3/2}} \hat{z} = -\frac{\pi a b \lambda_a |\lambda_b| z_0}{\varepsilon_0 (a^2+{z_0}^2)^{3/2}} \hat{z} \tag{24}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene:

$$\vec{F}(z_0) = -\frac{\pi \times 1 \times 10^{-3} \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{-9} \times 10^{-2}}{8.85 \times 10^{-12} (1^2+(10^{-2})^2)^{\frac{3}{2}}} \text{N}\, \hat{z} = -7.1 \times 10^{-11}\ \text{N}\, \hat{z} \tag{25}$$

2) Le correnti elettriche associate ai due anelli si calcolano osservando che in un tempo pari al periodo di rotazione $T$ dell'anello attorno al proprio asse ogni elemento di carica distribuito sulla superficie dell'anello

stesso compie un giro completo; pertanto l'intera carica distribuita sull'anello compie un giro completo e quindi la corrente associata ad un anello di carica $Q_R = 2\pi\lambda_R R$ è:

$$I_R = \frac{Q_R}{T} = \frac{2\pi\lambda_R R}{2\pi/\omega} = \omega\lambda_R R \tag{26}$$

Le correnti elettriche dovute alle rotazioni dei due anelli sono quindi:

$$I_a = \frac{Q_a}{T} = \frac{2\pi\lambda_a a}{2\pi/\omega} = \omega\lambda_a a = 10 \times 10^{-9} \times 1 \text{ A} = 10^{-8} \text{ A} \tag{27a}$$

$$I_b = \frac{Q_b}{T} = \frac{2\pi\lambda_b b}{2\pi/\omega} = \omega\lambda_b b = -10 \times 2 \times 10^{-9} \times 10^{-3} \text{ A} = -2 \times 10^{-11} \text{ A} \tag{27b}$$

Dalla conoscenza delle correnti si ricavano immediatamente i momenti magnetici (si noti che il momento magnetico del secondo anello è diretto nel verso delle $z$ negative):

$$\vec{\mu}_a = \hat{z} I_a \pi a^2 = \hat{z}\omega\lambda_a a\pi a^2 = \hat{z}\omega\pi a^3\lambda_a = 10\pi \times 1^3 \times 10^{-9} \text{ Am}^2\, \hat{z} = 3.14 \times 10^{-8} \text{ Am}^2\, \hat{z} \tag{28a}$$

$$\vec{\mu}_b = \hat{z} I_b \pi b^2 = \hat{z}\omega\lambda_b b\pi b^2 = \hat{z}\omega\pi b^3\lambda_b = -10\pi \times (10^{-3})^3 \times 10^{-9} \text{ Am}^2\hat{z} = -3.14 \times 10^{-17} \text{ Am}^2\hat{z} \tag{28b}$$

3) La formula esatta per il campo di induzione magnetica generato da un anello di raggio $R$ percorso da una corrente $I$ sull'asse $z$ è:

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \tag{29}$$

mentre quella, fornita nel testo, per il campo di induzione magnetica prodotto dal dipolo $\vec{\mu}$ è:

$$\vec{B}_{\vec{\mu}} = \frac{\mu_0}{2\pi z^3}\vec{\mu} = \frac{\mu_0 \pi R^2 I}{2\pi z^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2z^3}\hat{z} \tag{30}$$

dove si è sostituita l'espressione (analoga alle (28)) del momento magnetico di un anello di raggio $R$. Il rapporto fra i moduli dei due campi è quindi dato solo dal rapporto inverso dei denominatori, cioè:

$$\frac{|\vec{B}_{\vec{\mu}}|}{|\vec{B}_R|} = \frac{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}{z^3} = (1+\alpha^2)^{3/2} \tag{31}$$

dove $\alpha = R/z$. I due valori sono quindi tanto più vicini quanto più $\alpha \to 0$, cioè ad una distanza dall'anello molto maggiore del raggio dell'anello. Nel nostro caso invece, essendo $\alpha = (R/z_0) = (a/z_0) = 100$, i due valori sono molto diversi, per cui approssimando il campo della spira grande con quello del suo dipolo magnetico si commetterebbe un grave errore. Al contrario l'approssimazione di dipolo magnetico sarebbe valida se ci trovassimo nella situazione opposta, cioè se ad es. risultasse $\alpha = 10^{-2}$.

4) Trascurando l'interazione magnetica l'unica forza agente sulla spira piccola è quella elettrostatica, data dalla (24). Tale forza è conservativa e sempre attrattiva (infatti contiene $z_0$ col suo segno), per cui il moto è simmetrico e quindi la spira piccola avrà velocità nulla anche in $-z_0$; pertanto i punti di coordinate $z_0$ e $-z_0$ sono i punti di inversione del moto. La spira piccola si muove quindi di moto periodico nell'intervallo $[-z_0, +z_0]$. A rigore il suo moto non è armonico, perché la dipendenza della forza dalla coordinata $z$, espressa nella (24), non è puramente lineare; tuttavia notiamo che, essendo $a \gg |z|$ in tutta la regione del moto, l'espressione (24) può essere approssimata da:

$$\vec{F}(z) \approx -\frac{\pi b \lambda_a |\lambda_b| z}{\varepsilon_0 a^2} \hat{z} \tag{32}$$

che ha la dipendenza richiesta per produrre un moto armonico. Concludiamo quindi che il moto è periodico e ben approssimabile con un moto armonico.