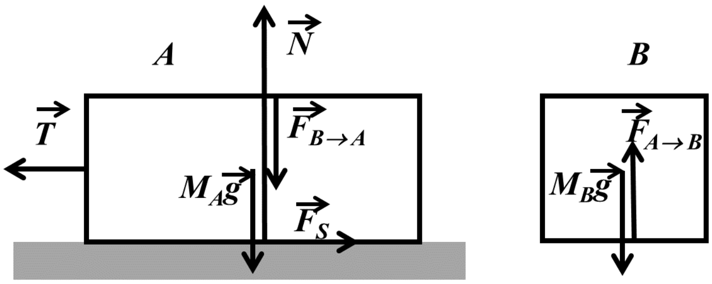
Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 20 Luglio 2018

Esercizio 1

1) Sul blocco A agiscono:
- la forza peso $m_A\vec{g}$;
- la reazione normale del piano $\vec{N}_A$;
- la forza dovuta al blocco B che indichiamo con $\vec{F}_{B\to A}$;
- la forza d'attrito statico dovuta al piano $\vec{F}_S$;
- la forza di tensione $\vec{T}$ esercitata dalla fune tirata dall'uomo.



Sul blocco B agiscono:
- la forza peso $m_B\vec{g}$;
- la forza dovuta al blocco A che indichiamo con $\vec{F}_{A\to B}$. Chiaramente per il principio di azione e reazione si ha: $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$.

Le forze agenti sui due blocchi sono mostrate nella Figura; le forze verticali, pur essendo in linea di principio dirette lungo la stessa linea d'azione (almeno a coppie) sono state leggermente separate in direzione orizzontale per chiarezza di disegno.

2) Il blocco A inizia a muoversi quando la forza di tensione $\vec{T}$ eguaglia la massima forza d'attrito fra il blocco stesso ed il pavimento, cioè quando:

$$T = \mu_S|\vec{N}| \tag{1}$$

Per trovare la tensione minima è quindi necessario imporre che i due blocchi siano fermi fino a quando la forza d'attrito statico raggiunge il valore massimo compatibile con il coefficiente d'attrito. Scriviamo quindi in generale la condizione di equilibrio dei due blocchi:

$$\text{Blocco } A\text{:}\ \ m_A\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_S + \vec{T} = 0 \tag{2a}$$
$$\text{Blocco } B\text{:}\ \ m_B\vec{g} + \vec{F}_{A\to B} = m_B\vec{g} - \vec{F}_{B\to A} = 0 \tag{2b}$$

Scomponendo l'equazione (2a) nelle direzioni orizzontale e verticale e tenendo conto della (2b) si ottiene:

$$\begin{cases} Orizzontale\text{:} \quad T - F_S = 0 \\ Verticale\text{:} \, m_Bg + m_Ag - N = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dalla seconda delle (3) si ricava immediatamente:

$$N = (m_B + m_A)g \tag{4}$$

e sostituendo nella (1):

$$T = \mu_S(m_B + m_A)g = 0.15\times(30 + 40)\times 9.8\ \text{N} = 102.9\ \text{N} \tag{5}$$

Il blocco B, non essendoci attrito fra la sua superficie e quella del blocco A, resta nella sua posizione, per cui il blocco A scivola sotto a lui senza spostarlo.

3) La forza muscolare dell'uomo e la forza di attrito non sono conservative, per cui dobbiamo applicare il teorema delle forze vive: il lavoro totale delle forze è pari alla variazione dell'energia cinetica del sistema, che è dovuta solo al blocco A in quanto, come visto alla fine del punto 2), il blocco B resta fermo. La variazione di energia cinetica è:

$$\Delta K = K_f - K_{in} = \frac{1}{2} m_A V_A^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 40 \times 0.6^2 = 7.2 \text{ J} \tag{6}$$

Sul blocco A agiscono la forza di attrito dinamico e la forza di tensione della fune. Poiché la forza di tensione rimane fissa al valore calcolato in 2) (formula (5)) il lavoro compiuto dall'uomo si ottiene immediatamente:

$$\mathcal{L}_u = \int_{\vec{x}_i}^{\vec{x}_f} \vec{T} \cdot d\vec{l} = Tl = 102.9 \times 0.4 \text{ J} = 41.16 \text{ J} \tag{7}$$

Il lavoro della forza di attrito dinamico è quindi:

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_u - \Delta K = 33.96 \text{ J} \tag{8}$$

Il coefficiente μ_d si ricava infine utilizzando la formula usuale dell'attrito dinamico ricordando che, come precisato nel testo, il blocco A rimane sempre sopra al blocco B. Pertanto la reazione del pavimento è sempre data dalla (4) e:

$$\mu_d = \frac{\mathcal{L}_d}{(m_B + m_A) g l} = \frac{33.96 \text{ J}}{(30+40) \times 9.8 \text{ N} \times 0.4 \text{ m}} = 0.123 \tag{9}$$

4) Le equazioni (2) che valevano in assenza di attrito statico fra i blocchi A e B ed in corrispondenza dell'inizio del moto del blocco A devono essere modificate per tener conto del fatto che ora:
a) l'intero sistema è in moto, per cui il secondo membro delle equazioni non sarà "0", ma $m_{A,B}\vec{a}$ dove $\vec{a}$ è l'accelerazione comune ai due blocchi fin quando si mantengono uniti;
b) fra i due blocchi è presente una forza di attrito statico, che indicheremo con $\vec{F}_{S,B\to A}$ se consideriamo l'azione del blocco B sul blocco A e $\vec{F}_{S,A\to B}$ nel caso contrario. Per il terzo principio $\vec{F}_{S,A\to B} = -\vec{F}_{S,B\to A}$;
c) l'attrito fra il blocco A ed il piano è dinamico, per cui $\vec{F}_S$ va sostituita con $\vec{F}_D$.
Le equazioni (2) diventano quindi:

$$\text{Blocco } A\text{: } m_A\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_D + \vec{F}_{S,B\to A} + \vec{T} = m_A\vec{a} \tag{10a}$$
$$\text{Blocco } B\text{: } m_B\vec{g} + \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{S,A\to B} = m_B\vec{g} - \vec{F}_{B\to A} - \vec{F}_{S,B\to A} = m_B\vec{a} \tag{10b}$$

L'equazione (10b), separando le componenti orizzontale e verticale, diventa:

$$\begin{cases} Orizzontale: \left|\vec{F}_{S,B\to A}\right| = \left|\vec{F}_{S,A\to B}\right| = m_B a \\ Verticale: \quad m_B g - F_{B\to A} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

La seconda delle (11) è analoga alla (2b), mentre dalla prima segue:

$$F_{S,A\to B} = m_B a \tag{12}$$

La (12) esprime in maniera quantitativa l'osservazione intuitiva che il blocco B è trascinato dalla forza di attrito a muoversi solidalmente al blocco A. Anche la (10a) può essere separata in componenti orizzontale e verticale ottenendo:

$$\begin{cases} Orizzontale: \qquad T - F_D - \left|\vec{F}_{S,B\to A}\right| = m_A a \\ Verticale: \; m_A g + F_{B\to A} - N = \; m_A g + \; m_B g - N = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Si noti che T e $\left|\vec{F}_{S,B\to A}\right|$ hanno <u>segno opposto</u>.

La seconda delle (13) è identica alla seconda delle (3), come prevedibile visto che le differenze rispetto alla domanda 2) sono presenti solo sull'asse orizzontale. Abbiamo quindi, sostituendo nella prima:

$$T = F_D + \left|\vec{F}_{S,B\to A}\right| + m_A a = \mu_d N + \left|\vec{F}_{S,B\to A}\right| + m_A a = \mu_d N + m_B a + m_A a = \\ \mu_d N + (m_B + m_A)a = (m_B + m_A)(a + \mu_d g) \tag{14}$$

Secondo la (11) l'accelerazione del blocco B non può superare il valore massimo consentito dalla forza d'attrito statico, ovvero:

$$a = \frac{F_{S,A\to B}}{m_B} \leq \frac{\mu_{s,AB} m_B g}{m_B} = \mu_{s,AB} g \tag{15}$$

La tensione della corda in corrispondenza della quale i due blocchi si staccano si ricava quindi imponendo che l'accelerazione che compare nella (14) eguagli questo valore limite; pertanto:

$$T_{min} = (m_B + m_A)(\mu_{s,AB} g + \mu_d g) = g(m_B + m_A)(\mu_{s,AB} + \mu_d) = \\ 9.81\times(30 + 40)\times(0.25 + 0.12)\; N = 254\; N \tag{16}$$

Esercizio 2

1) Data la simmetria delle distribuzioni di cariche il campo elettrico è radiale; utilizzando il teorema di Gauss su superfici sferiche di raggio generico r si ottiene:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 \quad r < R_1 \\ \frac{R_1^2 \sigma_1}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_1^2\sigma_1 + R_2^2\sigma_2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad r > R_2 \end{cases} \tag{17}$$

Utilizzando la relazione tra i due raggi ed imponendo che $\vec{E}(R_2) = \frac{3}{4}\vec{E}(R_1)$ si può determinare la relazione tra le due densità superficiali di carica:

$$\frac{R_1^2\sigma_1 + 4R_1^2\sigma_2}{\varepsilon_0 4R_1^2} = \frac{3R_1^2}{4\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \tag{18}$$

L'andamento del modulo del campo elettrico in funzione della distanza R dal centro degli strati è mostrato in figura 1 (da fare).

2) Il potenziale al centro degli strati sferici può essere calcolato sommando il contributo dei due strati. Il potenziale del singolo strato sferico per raggio maggiore dello strato sferico si comporta come il potenziale di una singola carica di intensità pari alla carica totale dello strato posta al centro dello strato; per raggi minori del raggio dello strato sferico è costante e pari al potenziale al raggio uguale a quello dello strato sferico stesso. Quindi si ottiene:

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{R_1} + \frac{4\pi R_2^2\sigma_2}{R_2}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}(R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2) = \frac{2R_1\sigma_1}{\varepsilon_0} \tag{19}$$

3) Il potenziale è monotono decrescente per $r > R_1$ quindi per restare intrappolata all'interno della distribuzione la carica q deve avere esattamente l'energia cinetica necessaria per compensare l'aumento di energia potenziale tra la posizione iniziale ed il centro della sfera. Quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 = U(0) \rightarrow v = \sqrt{\frac{4qR_1\sigma_1}{m\varepsilon_0}} \tag{20}$$

4) Il campo all'interno dello strato di conduttore sferico è nullo per la proprietà del conduttore, per cui sullo strato interno del conduttore si deve trovare una carica, Q_{st} uguale in modulo e di segno opposto alla carica totale Q_{int} dei due strati sferici: $Q_{st} = -Q_{int} = -4\pi(R_1^2\sigma_1 + R_2^2\sigma_2) = -12\pi R_1^2\sigma_1$. Il potenziale sulla superficie del conduttore è determinato dalla somma di tutti i contributi:

$$V(R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_{ext}}{R_3} + \frac{Q_{int}}{R_3} + \frac{Q_{st}}{R_3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ext}}{R_3} \tag{21}$$

dove Q_{ext} è la carica disposta sullo strato esterno del conduttore. Poiché $V(R_3) = V$ si deve avere:

$$Q_{ext} = 4\pi\varepsilon_0 V R_3 \tag{22}$$

e quindi la carica totale sul conduttore è:

$$Q = Q_{ext} + Q_{st} = 4\pi\varepsilon_0 V R_3 - 12\pi R_1^2\sigma_1 \tag{23}$$

ed il campo elettrico all'esterno del conduttore è:

$$\vec{E} = \frac{VR_3}{r^2}\hat{r} \tag{24}$$

Soluzione alternativa:

Il potenziale della sfera è legato alla carica Q_{ext} distribuita sulla superficie esterna del conduttore dalla relazione:

$$V = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_{ext}}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \tag{25}$$

quindi il campo elettrico per $r > R_3$ è dato dalla (24). La carica totale sul conduttore sarà determinata dal vincolo dato dal campo elettrico nullo all'interno del conduttore, come discusso nella soluzione sopra.