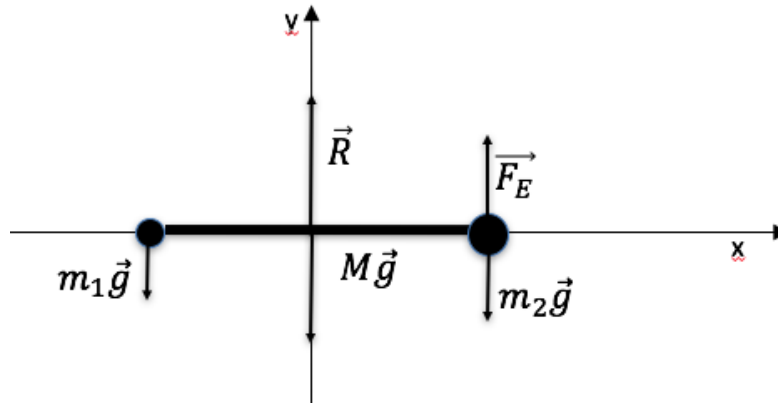


Esercizio 1

1) In figura sono mostrate le forze che agiscono sul sistema ed i loro punti di applicazione. Oltre alle forze peso sul sistema agiscono la reazione del vincolo \vec{R} e la forza elastica \vec{F}_E .



La prima equazione cardinale nel caso in cui il sistema è in equilibrio è:

$$m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + M \vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_E = 0 \quad (1)$$

Scegliendo il polo coincidente con O , il punto in cui l'asta è incernierata, il momento della reazione vincolare è nullo. Tutti i momenti hanno direzione ortogonale al piano xy , quindi la sommatoria dei momenti giace lungo \hat{z} e vale:

$$-(m_1 g + F_E) \frac{L}{2} + m_2 g \frac{L}{2} = 0 \quad (2)$$

2) Utilizziamo la seconda equazione cardinale per trovare l'allungamento della molla nella posizione di equilibrio:

$$-\left(\frac{M}{3} g + kd\right) \frac{L}{2} + \frac{2}{3} M g \frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$

da cui si ottiene:

$$d = \frac{Mg}{3k} \quad (4)$$

3) Tutte le forze che agiscono sul sistema P_1 , P_2 ed asta e che fanno lavoro sono conservative e quindi le possiamo descrivere attraverso l'energia potenziale. L'unica forza non conservativa che agisce sul sistema, la reazione del perno, non compie lavoro per cui l'energia meccanica del sistema (asta, P_1 , P_2 , terra) si conserva. Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale in cui la sbarretta è orizzontale e l'istante finale in cui la sbarretta passa per la prima volta per la posizione verticale.

L'energia cinetica iniziale è nulla mentre l'energia cinetica finale è:

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 \left(\omega \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\omega \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\omega^2 L^2 M}{6} \quad (5)$$

dove ω è la velocità angolare ed I è il momento di inerzia della sbarretta rispetto al centro della sbarretta ed è pari a $I = \frac{ML^2}{12}$. Scegliamo lo zero dell'energia potenziale al livello $y = 0$; in questo modo l'energia potenziale iniziale è nulla mentre l'energia potenziale finale è:

$$U = m_1 g \frac{L}{2} - m_2 g \frac{L}{2} = -\frac{MgL}{6} \quad (6)$$

Imponendo quindi $E_c + U = 0$ si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (7)$$

Le velocità dei punti materiali P_1 e P_2 quando la sbarretta passa in posizione verticale sono quindi:

$$V_{1y} = V_{2y} = 0 \quad (8)$$

$$V_{1x} = -V_{2x} = \omega \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{gL}{4}} \quad (9)$$

La posizione del centro di massa del sistema quando il sistema passa per la posizione verticale si trova lungo l'asse y :

$$y_{CM} = \frac{m_1 \frac{L}{2} - m_2 \frac{L}{2}}{m_1 + m_2 + M} = -\frac{L}{12} \quad (10)$$

dunque l'accelerazione dell'asta che è l'accelerazione centripeta è data da:

$$\vec{a}_{CM} = \omega^2 \frac{L}{12} \hat{y} = \frac{g}{12} \hat{y} \quad (11)$$

4) Per trovare la reazione vincolare possiamo scrivere la prima equazione cardinale per il sistema asta, P_1 , P_2 :

$$m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + M \vec{g} + \vec{R} = M_T \vec{a}_{CM} = 2M \vec{a}_{CM} \quad (12)$$

La reazione vincolare nel momento in cui l'asta è verticale si può quindi ottenere sostituendo nell'equazione il valore dell'accelerazione del centro di massa determinato nella domanda 3):

$$\vec{R} = 2M \frac{g}{12} \hat{y} + 2Mg \hat{y} = \frac{13}{6} Mg \hat{y} \quad (13)$$

Esercizio 2

1) Introduciamo come suggerito una densità lineare di carica equivalente λ , che poi collegheremo a ρ . Poiché la densità di carica sul filo a destra è la metà cambiata di segno di quella sul filo a sinistra, il campo elettrico in un punto distante x dall'asse del filo a sinistra è:

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{x} - \frac{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}{2\pi\epsilon_0(a-x)} \hat{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(a-x)}\right) \hat{x} \quad (14)$$

Nel punto P , equidistante dai fili, $x = a/2$ da cui:

$$\vec{E}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{\frac{a}{2}}\right) \hat{x} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 a} \hat{x} \quad (15)$$

Sostituendo il valore del modulo di $\vec{E}(a/2)$ fornito nel testo si ha:

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 a |\vec{E}(a/2)|}{3} = 1.6 \times 10^{-9} \text{ C/m} = 1.6 \text{ nC/m} \quad (16)$$

La relazione fra λ e la carica di volume ρ si ricava notando che:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{\rho dV}{dz} = \frac{\rho S dz}{dz} = \rho S = \rho \pi R^2 \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\pi R^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 a |\vec{E}(a/2)|}{3\pi R^2} = \frac{1.6 \times 10^{-9} \text{ C}}{\pi \times 9 \times 10^{-4} \text{ m}^3} = 566 \frac{\text{nC}}{\text{m}^3} \quad (17)$$

2) Per determinare la differenza di potenziale fra i punti Q_1 e Q_2 dobbiamo integrare il campo elettrico (14) nell'intervallo di x corrispondente alla posizione dei due punti, che si trovano rispettivamente in $x = R$ e $x = a - R$. Pertanto:

$$V(Q_2) - V(Q_1) = - \int_R^{a-R} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(a-x)} \right) dx = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{a-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(a-x)} \right) dx \quad (18)$$

I due integrali nella (18) valgono rispettivamente:

$$\int_R^{a-R} \frac{dx}{x} = [\ln x]_R^{a-R} = \ln \left(\frac{a-R}{R} \right) = \ln \left(\frac{17}{3} \right) = 1.7346 \quad (19a)$$

$$\int_R^{a-R} \frac{dx}{2(a-x)} = -\frac{1}{2} [\ln(a-x)]_R^{a-R} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{R}{a-R} \right) = +\frac{1}{2} \ln \left(\frac{a-R}{R} \right) = 1.7346 / 2 = 0.8673 \quad (19b)$$

La differenza di potenziale $V(Q_2) - V(Q_1)$ vale quindi:

$$V(Q_2) - V(Q_1) = -\frac{3}{2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{a-R}{R} \right) = -\frac{3}{4} \frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{a-R}{R} \right) = -\frac{1.6 \times 10^{-9} \times (1.7346 + 0.8673)}{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V} = -75 \text{ V} \quad (20)$$

3) Applicando il principio di conservazione dell'energia nel moto da Q_1 a Q_2 si ricava:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{mV_0^2}{2} - eV(Q_1) = K_{fin} + U_{fin} = \frac{mV_f^2}{2} - eV(Q_2) \quad (21)$$

La velocità minima si ottiene chiaramente richiedendo che la velocità finale sia nulla; pertanto inserendo la condizione $V_f = 0$ e muovendo opportunamente i termini della (21) si ottiene:

$$\frac{mV_0^2}{2} = -e(V(Q_2) - V(Q_1)) = +e(V(Q_1) - V(Q_2)) \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2e(V(Q_1) - V(Q_2))}{m}} = 10^6 \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 75}{9.1}} \text{ m/s} = 5.16 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (22)$$

4) Per calcolare la differenza di potenziale fra i centri dei due cilindri dobbiamo innanzitutto determinare i campi all'interno dei due cilindri. Grazie all'ipotesi che le due distribuzioni non si influenzino separatamente concludiamo che il campo elettrostatico di ciascuno dei due cilindri è a simmetria radiale, diretta lungo la coordinata cilindrica \hat{r} , ortogonale all'asse del cilindro e dipende solo da r . Consideriamo allora il primo cilindro; l'estensione al secondo sarà automatica rimpiazzando ρ con $-\rho/2$. Prendiamo un cilindro di Gauss, coassiale al primo cilindro reale, di lunghezza L e raggio $r < R$. Il flusso del campo \vec{E} attraverso questo cilindro è:

$$\Phi(\vec{E}) = E(r)2\pi rL = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho\pi r^2L}{2\pi rL\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad (23)$$

Possiamo quindi calcolare la differenza di potenziale fra il centro ed il bordo del cilindro, cioè:

$$V(Q_1) - V(O_1) = -\int_0^R E(r)dr = -\int_0^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \quad (24)$$

Analogamente:

$$V(Q_2) - V(O_2) = -\int_0^R E(r)dr = -\int_0^R \frac{\left(-\frac{\rho}{2}\right)r}{2\varepsilon_0} dr = +\frac{\rho R^2}{8\varepsilon_0} = +\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0} \quad (25)$$

Riunendo i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} V(O_2) - V(O_1) &= V(O_2) - V(Q_2) + V(Q_2) - V(Q_1) + V(Q_1) - V(O_1) = \\ &= -(V(Q_2) - V(O_2)) + (V(Q_2) - V(Q_1)) + (V(Q_1) - V(O_1)) = -75 \text{ V} - \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0} = -82.2 \text{ V} \end{aligned} \quad (26)$$