

## Soluzione prova scritta Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 8 Giugno 2018

### Esercizio 1

1) Le forze agenti sul sistema sono la forza di gravità sul corpo di massa  $M$  e sul disco di massa  $m$ , la reazione perpendicolare del piano del tavolo sul disco e la forza di tensione della fune, che è una forza interna ed è applicata sul disco e su  $M$ . La reazione perpendicolare compensa  $m\vec{g}$ , ma la forza di tensione  $\vec{T}$  della fune non è compensata, per cui il disco è accelerato con accelerazione data da  $\vec{T}/m$ . Anche il corpo di massa  $M$  si muove in generale di moto accelerato, perché su di esso agiscono  $M\vec{g}$  e  $\vec{T}$  che non sono eguali ed opposte, tranne che nel caso particolare del punto 2), come vedremo. Pertanto le quantità di moto del disco e del corpo di massa  $M$  non si conservano. Si conserva invece il momento angolare  $\vec{L}_m$  del disco rispetto al foro: infatti l'unica forza non compensata agente su  $m$ , cioè la tensione  $\vec{T}$ , segue la direzione istantanea della corda per cui è una forza centrale, diretta in ogni istante dal disco al foro. Tale forza non ha quindi momento rispetto al foro, per cui  $\vec{L}_m$  si conserva. Parimenti si conserva l'energia totale del sistema (disco + corpo + fune), in quanto l'unica forza presente potenzialmente non conservativa è la tensione  $\vec{T}$ , il cui lavoro è nullo a causa della inestensibilità della corda.

2) Affinché il disco possa compiere un moto circolare uniforme sul tavolo è necessario che la forza di tensione  $\vec{T}$  imprima al disco stesso l'accelerazione centripeta necessaria per mantenersi su una traiettoria circolare di raggio  $r_0$ . D'altra parte, essendo la corda inestensibile, il corpo di massa  $M$  deve mantenersi ad una quota fissa di valore  $-(l - r_0)$  rispetto alla superficie del tavolo, cioè deve rimanere fermo nella posizione in cui è stato inizialmente sospeso, sotto l'azione della sua forza peso e della tensione della corda. Le equazioni del moto per il disco e la massa  $M$  sono quindi:

$$\begin{cases} \vec{T} = m\vec{a}_c = -m\frac{V_0^2}{r_0}\hat{r}_0 \\ \vec{T} + M\vec{g} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dalla seconda equazione di questo sistema segue subito:

$$\vec{T} = -M\vec{g} \quad (2)$$

Prima di sostituire nella prima delle (1) bisogna tenere presente che passando attraverso il foro, che agisce come una carrucola liscia, la forza di tensione cambia direzione senza cambiare modulo: infatti quando è applicata sul corpo di massa  $M$  è diretta verticalmente, in verso opposto a  $M\vec{g}$ , mentre quando è applicata sul disco è diretta orizzontalmente sul piano del tavolo verso il foro. Pertanto si può sostituire nella prima equazione del sistema (1) il modulo della tensione ricavandolo dalla (2) e determinare  $V_0$ :

$$\left| -m\frac{V_0^2}{r_0}\hat{r}_0 \right| = m\frac{V_0^2}{r_0} = |\vec{T}| = Mg \quad \Rightarrow V_0^2 = \frac{Mg r_0}{m} \quad \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{Mg r_0}{m}} \quad (3)$$

Incidentalmente notiamo che in questo caso particolare si conserva anche la quantità di moto del corpo di massa  $M$  che come già osservato rimane sempre fermo.

3) Poiché il momento angolare del disco rispetto al foro si conserva possiamo scrivere:

$$\vec{L}(r) = \vec{r} \wedge m\vec{V}(r) = m\vec{r} \wedge (\dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} = \vec{L}(r_0) = \vec{r}_0 \wedge m\vec{V}_0 = mr_0 V_0 \hat{z} \quad (4)$$

dove si è sfruttata l'ortogonalità fra  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$  e si è introdotto l'asse  $\hat{z}$  perpendicolare al piano del tavolo. Per definizione la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è parallela a  $\hat{z}$ . Si ottiene quindi:

$$mr^2\vec{\omega} = mr_0V_0\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{r_0V_0}{r^2}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{r_0V_0}{r^2} \quad (5)$$

4) L'altra grandezza fisica conservata determinata al punto 1) è l'energia totale del sistema, che si compone dell'energia cinetica del disco e della massa  $M$  e dell'energia potenziale di  $M$ . L'energia potenziale del disco è irrilevante perché il disco è sempre appoggiato sul tavolo, per cui la sua quota non può cambiare. Scegliendo quindi lo zero dell'energia potenziale sulla superficie del tavolo ed utilizzando un asse verticale verso il basso l'energia totale del sistema quando il disco si trova a distanza  $r$  dal foro prende la forma:

$$E = K_m + K_M + U_M = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} - Mg(l - r) \quad (6)$$

in quanto  $(l - r)$  è la lunghezza del tratto di corda che sporge al di sotto del tavolo. Notiamo innanzitutto che il termine  $-Mgl$  è una costante additiva che può essere omessa per l'arbitrarietà della scala dell'energia potenziale. Inoltre la velocità  $\vec{V}_M$ , diretta verticalmente, è proprio la derivata rispetto al tempo della quota della massa  $M$  rispetto al tavolo, cioè:

$$\vec{V}_M = \frac{d}{dt}(-(l - r)\hat{z}) = \dot{r}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad V_M^2 = \dot{r}^2 \quad (7)$$

Infine la velocità  $\vec{V}_m$  ha, come nella (4), sia la componente radiale  $\dot{r}\hat{r}$  sia la componente tangenziale  $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega r\hat{\theta}$  dove  $\hat{\theta}$  è il versore tangenziale ortogonale a  $\hat{r}$ . Quindi:

$$V_m^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \quad (8)$$

Sostituendo nella (6) si ottiene:

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)}{2} + \frac{M\dot{r}^2}{2} + Mgr + \text{costante} = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + Mgr + \text{costante} \quad (9)$$

So ora sostituiamo la (5) nella (9) ricaviamo un'espressione dell'energia in funzione di  $r$  e di  $\dot{r}$ :

$$E = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{mr_0^2V_0^2}{2r^2} + Mgr + \text{costante} \quad (10)$$

Poiché l'energia totale è costante, la variabile  $r$  non può assumere qualsiasi valore: infatti il secondo termine diverge per  $r \rightarrow 0$ , mentre il terzo diverge per  $r \rightarrow \infty$ . Quindi il disco non può allontanarsi arbitrariamente dal foro (ovvero esiste un  $r_{max}$ ) e non può neanche avvicinarsi arbitrariamente ad esso (ovvero esiste un  $r_{min}$ ). La determinazione di  $r_{min}$  e  $r_{max}$  si effettua notando che nei punti estremali della variabile  $r$  (funzione del tempo) la sua derivata temporale deve essere nulla, per cui nella (10)  $\dot{r} = 0$  per  $r = r_{min}$  e  $r = r_{max}$ . I valori estremi  $r_{min}$  e  $r_{max}$  sono quindi le radici dell'equazione di terzo grado:

$$E = \frac{mr_0^2V_0^2}{2r^2} + Mgr = E_0 = \frac{mV_0^2}{2} + Mgr_0 \quad (11)$$

in cui la costante (comune a  $E$  e  $E_0$ ) è stata ovviamente omessa.

## Esercizio 2

1) La resistenza della lastra è pari a:

$$R = \frac{\rho L}{SW} \quad (12)$$

quindi la corrente è:

$$i = \frac{V_+ - V_-}{R} = \frac{(V_+ - V_-)SW}{\rho L} \quad (13)$$

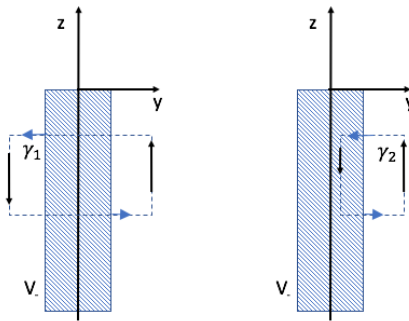
da cui si può ottenere l'espressione (vettoriale) della densità di corrente:

$$\vec{j} = \frac{i}{SW} \hat{x} = \frac{(V_+ - V_-)}{\rho L} \hat{x} \quad (14)$$

e del campo elettrostatico che è diverso da zero solo internamente alla lastra:

$$\vec{E} = \vec{j} \rho = \frac{(V_+ - V_-)}{L} \hat{x} \quad (15)$$

2) Il campo di induzione magnetica prodotto dalla corrente che scorre nella lastra è sicuramente perpendicolare alla direzione in cui scorre la corrente per cui  $B_x = 0$ . Anche la componente  $B_y$  deve essere nulla: infatti, una eventuale componente lungo  $y$  non cambierebbe direzione per una rotazione della lastra di  $\pi$  intorno all'asse  $y$  mentre le correnti cambierebbero verso, quindi  $B_y = 0$ . L'unica componente non nulla è quindi  $B_z$ . Il suo modulo può dipendere solo dalla distanza dalla lastra lungo l'asse  $y$  visto che, assumendo la lastra infinita, le traslazioni lungo  $x$  o  $z$  non modificano la distribuzione di correnti. Infine il verso di  $B_z$  è concorde con  $\hat{z}$  per  $y > 0$  e discorde per  $y < 0$ . In base a queste considerazioni possiamo calcolare il modulo del campo di induzione magnetica utilizzando la legge di Ampere sui percorsi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  mostrati in Figura 1.



Dall'applicazione della legge di Ampere su  $\gamma_1$  si ottiene:

$$2B(y)\Delta z = \mu_0 J S \Delta z \rightarrow B(y) = \frac{\mu_0 J S}{2} \quad (16)$$

da cui:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J S}{2} \hat{z} & \text{per } y > \frac{s}{2} \\ -\frac{\mu_0 J S}{2} \hat{z} & \text{per } y < -\frac{s}{2} \end{cases} \quad (17)$$

mentre dall'applicazione della stessa legge su  $\gamma_2$  si ottiene:

$$(-B(y) + B)\Delta z = \mu_0 J \left(\frac{S}{2} - y\right) \Delta z \Rightarrow -B(y) = \mu_0 J \left(\frac{S}{2} - y\right) - \frac{\mu_0 J S}{2} = -\mu_0 J y \quad (18)$$

quindi:

$$\vec{B} = \mu_0 J y \hat{z} \quad \text{per} \quad -\frac{S}{2} < y < \frac{S}{2} \quad (19)$$

3) Le forze che agiscono sulle tre sbarrette possono essere calcolate applicando la legge di Laplace. Iniziamo da  $AB$ :

$$\vec{F}_{AB} = i_c l \frac{\mu_0 J S}{2} \sin \theta \hat{x} \quad (20)$$

La forza su  $CD$  è uguale in intensità ma opposta in verso a quella su  $AB$  in quanto il verso della corrente in  $CD$  è opposto a quello in  $AB$ . Per le sbarrette parallele all'asse  $x$  si ottiene:

$$\vec{F}_{BC} = i_c l \frac{\mu_0 J S}{2} \hat{y} \quad (21)$$

ed anche in questo caso la forza su  $DA$  è uguale ed opposta a quella su  $BC$ . Come atteso la forza totale che agisce sul circuito è nulla visto che abbiamo un circuito chiuso immerso in un campo uniforme.

4) L'angolo a cui porre il circuito affinché stia in equilibrio si ottiene richiedendo che la risultante dei momenti che agiscono sulla sbarretta sia nulla (la risultante delle forze è nulla, vedi punto 3) lungo la direzione  $\hat{x}$  dell'asse di rotazione. Consideriamo come polo  $O$  il punto  $A$ : in questo modo per il momento della forza peso che agisce sulle tre sbarrette si ottiene:

$$\vec{M}_{Ox}(\text{Forza peso}) = \left[ -2mg \left(\frac{l}{2}\right) \sin \theta - mgl \sin \theta \right] \hat{x} = -2mgl \sin \theta \hat{x} \quad (22)$$

mentre il momento dovuto all'interazione magnetica vale:

$$\vec{M}_{Ox}(\text{Forza magnetica}) = \vec{\mu} \times \vec{B} = i_c l^2 B \cos \vartheta \hat{x} \quad (23)$$

La somma dei momenti è quindi nulla se:

$$i_c l^2 B \cos \vartheta - 2mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \vartheta = \frac{i_c l B}{2mg} \quad (24)$$