

Esercizio 1

1) Le rotazioni attorno ad un asse ortogonale ai piani e le traslazioni in una direzione parallela ai piani sono trasformazioni di simmetria per la distribuzione di carica, quindi il campo è diretto lungo l'asse x e dipende solo dalla coordinata x .

2) Il campo tra la piastra ed il piano è dato dalla somma del campo prodotto dalla distribuzione di cariche del piano carico ($\vec{E}_p$) che si può ottenere applicando la legge di Gauss e che nella regione considerata è pari a:

$$\vec{E}_p = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} \quad (1)$$

e del campo dato dalla lastra carica. Il campo generato dalla lastra ($\vec{E}_L$) può essere visto come il campo generato da una serie di piani carichi con densità superficiale $d\sigma = \rho_0 dx$ quindi il campo della lastra nella regione $L < x < d$ è dato da:

$$\vec{E}_L = \int_0^L \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} = \int_0^L \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} dx \hat{x} = \frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \hat{x} = \frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \hat{x} \quad (2)$$

Quindi il campo totale si annulla per $\sigma = \rho_0 L$ ed il campo del piano nella regione esterna al piano stesso può essere scritto come:

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \hat{x} \text{ per } x < 0 \quad (3)$$

$$\vec{E}_p = \frac{\rho_0 L}{2\varepsilon_0} \hat{x} \text{ per } x > L \quad (4)$$

3) Il campo in tutto lo spazio è dato dalla sovrapposizione di $\vec{E}_L$ e $\vec{E}_p$. Quindi:

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0 L}{\varepsilon_0} \hat{x} \text{ per } x < 0 \quad (5a)$$

$$\vec{E} = 0 \text{ per } L < x < d \quad (5b)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 L}{\varepsilon_0} \hat{x} \text{ per } x > d \quad (5c)$$

per la regione $0 < x < L$ si deve calcolare il contributo del piano della lastra sommando i contributi a destra ed a sinistra di x :

$$\vec{E}_L = \int_0^x \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} - \int_x^L \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} = \int_0^x \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} dx \hat{x} - \int_x^L \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} dx \hat{x} = \frac{\rho_0(2x-L)}{2\varepsilon_0} \hat{x} \quad (6)$$

quindi sommando i due contributi si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0(x-L)}{\varepsilon_0} \hat{x} \text{ per } 0 < x < L \quad (7)$$

Un metodo alternativo per calcolare il campo elettrico all'interno della lastra consiste nell'utilizzare la legge di Gauss in cui la superficie di Gauss è un cilindro con area di basi S e che ha una base nella zona $x < 0$ e la seconda faccia all'interno della lastra su un piano parallelo alla lastra a distanza x :

$$\phi(\vec{E}) = \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} S + E(x)S = \frac{\rho_0 x}{\epsilon_0} S \rightarrow \vec{E}(x) = \frac{\rho_0(x-L)}{\epsilon_0} \hat{x} \quad (8)$$

per $0 < x < L$. Per calcolare il potenziale si può opportunamente integrare il campo elettrico:

$$V(x) - V(0) = V(x) = - \int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (9)$$

e si ottiene:

$$V(x) = \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} x \text{ per } x < 0 \quad (10a)$$

$$V(x) = \frac{\rho_0 x(L-x/2)}{\epsilon_0} \text{ per } 0 < x < L \quad (10b)$$

$$V(x) = \frac{\rho_0 L^2}{2\epsilon_0} \text{ per } L < x < d \quad (10c)$$

$$V(x) = \frac{\rho_0 L^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_0 L}{\epsilon_0} (d - x) \text{ per } x > d \quad (10d)$$

Il grafico dell'andamento del potenziale in funzione di x è mostrato in figura 1.

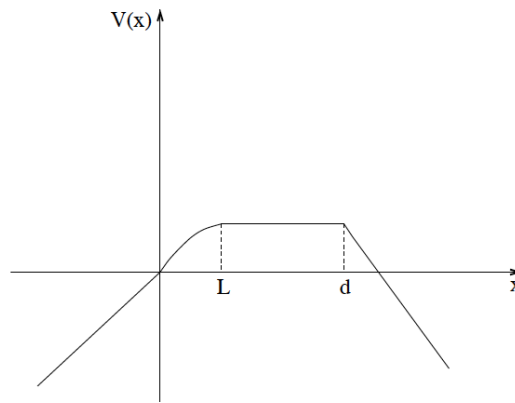


Figura 1

4) La velocità minima si trova imponendo che la particella giunga in $x = d$, punto di massimo del potenziale tra 0 e $2d$. Il campo è tale per cui una particella di carica positiva che raggiunge $x = d$ proseguirà fino a $x = -\infty$. Applicando la conservazione dell'energia meccanica al sistema particella + campo elettrico si ottiene:

$$x = 2d: E_c = \frac{1}{2} mV^2; U(2d) = qV(2d) = \frac{q\rho_0 L(L-2d)}{2\epsilon_0} \quad (11)$$

$$x = d: E_c = 0; U(d) = qV(d) = \frac{q\rho_0 L^2}{2\epsilon_0} \quad (12)$$

quindi:

$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{q\rho_0 Ld}{2\epsilon_0} = 0 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2q\rho_0 Ld}{m\epsilon_0}} \quad (13)$$

da cui sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$V = 3.36 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad (14)$$

Esercizio 2

1) Il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ prodotto dal filo è diretto tangenzialmente (lungo il versore $\hat{\theta}$), dipende solo dalla distanza r dal filo ed il suo verso corrisponde ad una rotazione antioraria. Il campo prodotto dalla distribuzione di carica in moto è anch'esso tangenziale e dipende solo da r , ma il suo verso è legato a quello della velocità $\vec{V}$ ed al modulo di quest'ultima; in particolare se $\vec{V}$ è nel verso delle z positive anche il campo prodotto dalla distribuzione ha verso antiorario per cui il campo risultante non può essere nullo, mentre se $\vec{V}$ è nel verso delle z negative il campo prodotto dalla distribuzione è diretto in verso orario, per cui il campo risultante può essere diretto sia nel verso antiorario che in quello orario o anche essere nullo.

2) In base al ragionamento del punto 1) concludiamo che per avere annullamento del campo di induzione magnetica totale è necessario che $\vec{V}$ sia diretta nel verso delle z negative, ovvero:

$$\vec{V} = -\hat{z}V \quad (15)$$

Poiché la simmetria del sistema è completamente cilindrica, scegliamo un circuito di Ampère γ a forma di circonferenza di raggio $r > 2b$, con centro sul filo e normale parallela a z . Applicando la legge di Ampère si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r = \mu_0 I_{\gamma} \quad (16)$$

dove I_{γ} è la corrente totale concatenata alla circonferenza γ . Affinché $B(r)$ sia nullo I_{γ} deve essere zero; d'altra parte:

$$I_{\gamma} = I + I_d(r > 2b) = 0 \quad \Rightarrow I_d(r > 2b) = -I \quad (17)$$

in cui $I_d(r > 2b)$ è la corrente totale della distribuzione, che attraversa interamente la circonferenza di Ampère. Applicando le definizioni di corrente e densità di corrente si ottiene:

$$I_d(r > 2b) = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} d\vec{S} = \int_S ne\vec{V} \cdot \hat{n} d\vec{S} = -neV \int_S dS = -neV\pi(4b^2 - b^2) = -3neV\pi b^2 \quad (18)$$

Nella (18) il vettore $\vec{S}$ rappresenta la superficie su cui è distribuita la corrente $\vec{J} = ne\vec{V}$ e corrisponde alla corona circolare di raggio interno b e raggio esterno $2b$ definita dalla sezione trasversa del cilindro forato in direzione ortogonale al suo asse. Sostituendo nella (17) si ricava infine:

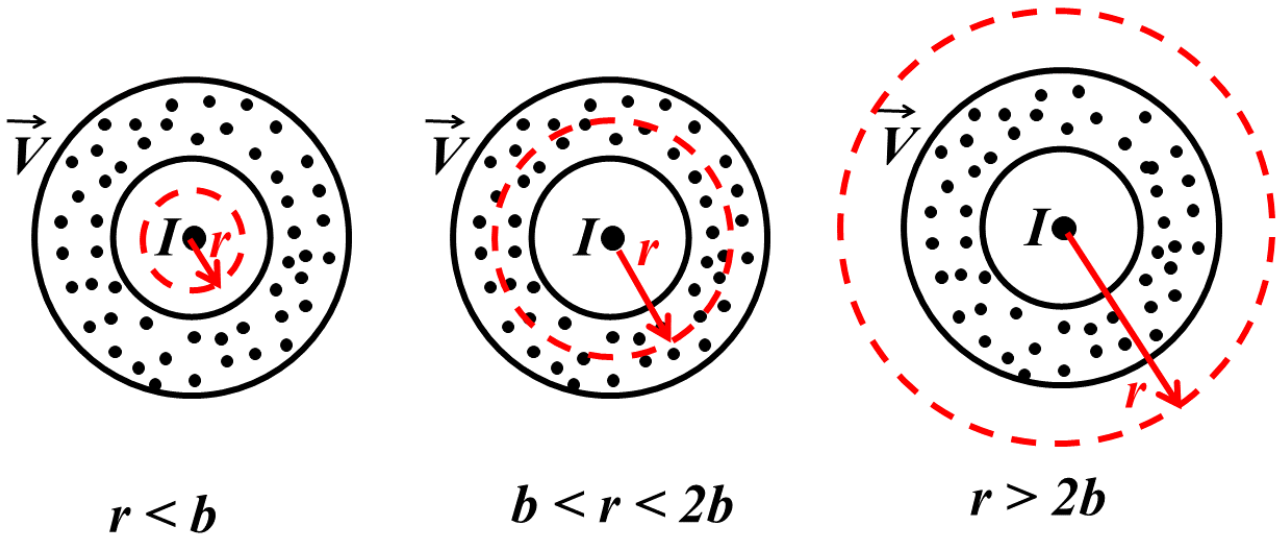
$$V = \frac{I}{3ne\pi b^2} \quad (19)$$

3) Per determinare il campo $\vec{B}$ in tutto lo spazio usiamo nuovamente la legge di Ampère con un circuito γ a forma di circonferenza di raggio r distinguendo tre casi:

a) $a < r < b$; b) $b < r < 2b$; c) $r > 2b$

Per il caso c) (vedi Figura a destra) non c'è niente da determinare, visto che la velocità $\vec{V}$ è stata scelta in modo da avere campo nullo all'esterno della distribuzione, per cui:

$$\vec{B}(r > 2b) = 0 \quad (20)$$



Per quanto riguarda il caso a) possiamo osservare (vedi Figura a sinistra) che la corrente concatenata al circuito di Ampère è solo quella del filo; dunque:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(a < r < b)2\pi r = \mu_0 I_{\gamma} = \mu_0 I \quad \Rightarrow B(a < r < b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (21)$$

Infine nel caso b) (vedi Figura al centro) la corrente concatenata alla circonferenza γ è quella del filo più la frazione della corrente all'interno del cilindro che risulta compresa fra il raggio interno a ed il raggio r della circonferenza stessa, cioè:

$$I_{\gamma} = I + I_a(r) = I + (-neV)\pi(r^2 - b^2) = I \left[1 - \frac{(r^2 - b^2)}{3b^2} \right] = I \left(\frac{4}{3} - \frac{r^2}{3b^2} \right) \quad (22)$$

Si ottiene quindi:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(b < r < 2b)2\pi r = \mu_0 I_{\gamma} = \mu_0 I \left(\frac{4}{3} - \frac{r^2}{3b^2} \right) \quad \Rightarrow B(b < r < 2b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{4}{3} - \frac{r^2}{3b^2} \right) \quad (23)$$

4) Poiché per ipotesi la densità di corrente di volume è doppia di quella calcolata nel punto 2) anche la corrente totale di volume raddoppia, per cui la corrente concatenata ad una circonferenza di Ampère di raggio $r > 2b$ è:

$$I_{\gamma} = I + (-2I) = -I \quad (24)$$

e quindi il campo di induzione magnetica è:

$$\vec{B}(r > 2b) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (25)$$

dove il segno negativo dovuto alla (24) indica che le linee di campo ruotano in senso orario. La forza di Lorentz risultante sulla carica q è quindi:

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(-V)\hat{z} \wedge \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right] \hat{\theta} = -\frac{\mu_0 I q V}{2\pi r} \hat{r} \quad (26)$$

La forza elettrostatica, data la simmetria cilindrica, ha la forma:

$$\vec{F}_{elettrostatica} = q\vec{E}_{elettrostatico} = q \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{q\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (27)$$

dove λ è la carica per unità di lunghezza della distribuzione. Ricaviamo innanzitutto λ :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = S \frac{dQ}{dV} = 3\pi b^2 2ne = \frac{2I}{v} \quad (28)$$

in cui $S = 3\pi b^2$ è la sezione trasversale del cilindro forato. Il rapporto fra l'intensità della forza di Lorentz e elettrica e quella elettrostatica è quindi:

$$\frac{F_{Lorentz}}{F_{elettrostatica}} = \frac{\mu_0 I q V}{2\pi r} \frac{2\pi\epsilon_0 r}{q\lambda} = \frac{\mu_0 I \epsilon_0 V}{\lambda} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{10^2}{3 \times 10^8} \right)^2 = 5.5 \times 10^{-14} \quad (29)$$