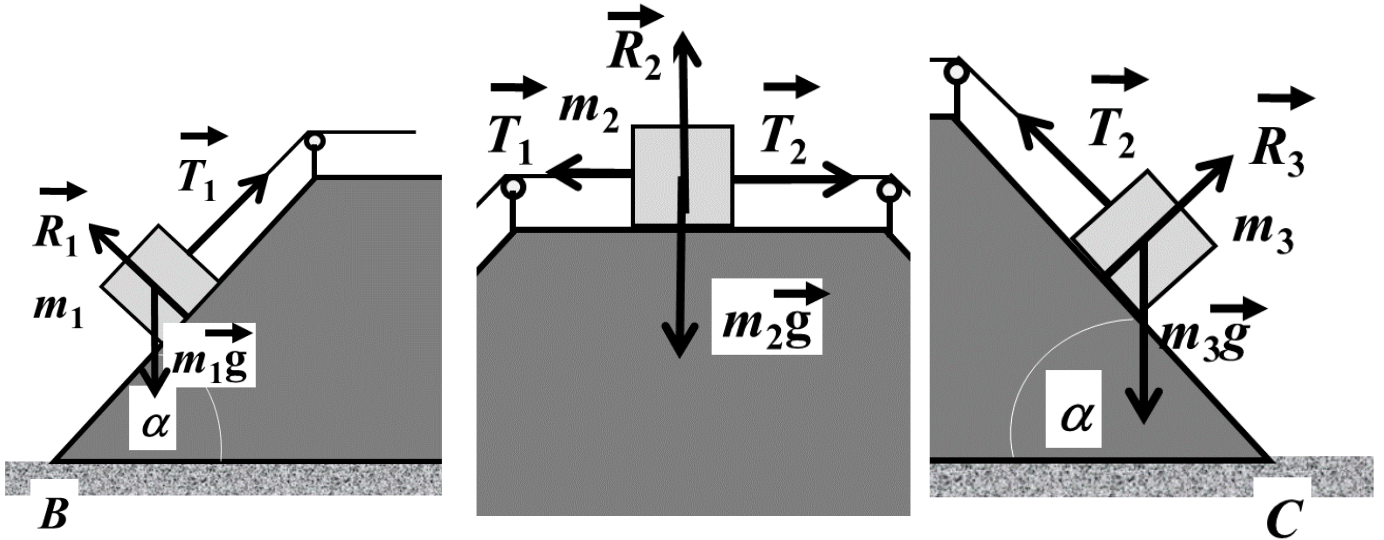


Esercizio 1

1) Sulla massa m_1 agiscono la sua forza peso $m_1\vec{g}$, la forza di tensione $\vec{T}_1$ e la reazione normale del blocco $\vec{R}_1$, come in Figura a sinistra. La forza peso è esterna mentre le altre sono interne al sistema formato dal blocco e dalle tre masse.



Sulla massa m_2 agiscono la sua forza peso $m_2\vec{g}$, le due forze di tensione $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ e la reazione normale del blocco $\vec{R}_2$, come in Figura al centro. La forza peso è esterna mentre le altre sono interne al sistema. Infine per la massa m_3 la situazione è analoga a m_1 : su m_3 agiscono la sua forza peso $m_3\vec{g}$, la forza di tensione $\vec{T}_2$ e la reazione normale del blocco $\vec{R}_3$ come in Figura a destra. La forza peso è esterna mentre le altre sono interne al sistema. Si noti che essendo tutte le forze peso (inclusa quella del blocco !) dirette verticalmente, l'unica forza esterna al sistema agente in direzione orizzontale è la forza $\vec{F}$, che quindi determina l'accelerazione del centro di massa $\vec{a}_{CM}$.

2) Se le tre masse sono ferme rispetto al blocco, le loro accelerazioni sono tutte eguali all'accelerazione $\vec{A}$ del blocco. Possiamo quindi scrivere le equazioni del moto per le tre masse nella forma:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{A} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{A} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{R}_2 \\ m_3\vec{a}_3 = m_3\vec{A} = m_3\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R}_3 \end{cases} \quad (1)$$

in cui le incognite sono le reazioni vincolari, le tensioni e la massa m_3 .

Iniziamo dall'equazione del moto per m_1 , scomponendola in direzione orizzontale e verticale ricordando che $\alpha = \pi/4 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$ e $A = g/2$:

$$\begin{cases} m_1 A = m_1 \frac{g}{2} = (T_1 - R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 = (T_1 + R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} - m_1 g \end{cases} \quad (2)$$

Sommando le due equazioni del sistema (2) si ottiene:

$$m_1 \frac{g}{2} = (T_1 - R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} + (T_1 + R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} - m_1 g = T_1 \sqrt{2} - m_1 g \Rightarrow T_1 = \frac{3m_1 g}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}m_1 g}{4} \quad (3)$$

Sottraendo le stesse equazioni si ottiene invece:

$$m_1 \frac{g}{2} = (T_1 - R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} - (T_1 + R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} + m_1 g = -R_1 \sqrt{2} + m_1 g \Rightarrow R_1 = \frac{m_1 g}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} m_1 g}{4} \quad (4)$$

Scomponendo in direzione orizzontale e verticale l'equazione del moto per m_3 si ottiene:

$$\begin{cases} m_3 A = m_3 \frac{g}{2} = (R_3 - T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 = (T_2 + R_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - m_3 g \end{cases} \quad (5)$$

Si può notare che il sistema (5) è analogo al sistema (2) con le sostituzioni: $T_1 \rightarrow R_3, R_1 \rightarrow T_2, m_1 \rightarrow m_3$; la soluzione del sistema (5) si determina quindi immediatamente da quella del sistema (2) (equazioni (3) e (4)) tenendo conto di tali sostituzioni:

$$R_3 = \frac{3\sqrt{2} m_3 g}{4} \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{2} m_3 g}{4} \quad (7)$$

con la (6) e la (7) che sono le analoghe rispettivamente della (3) e della (4) ed in cui ricordiamo che m_3 è ignota. Scomponendo infine in direzione orizzontale e verticale l'equazione del moto per m_2 si ottiene:

$$\begin{cases} m_2 A = m_2 \frac{g}{2} = (T_2 - T_1) \\ 0 = R_2 - m_2 g \end{cases} \quad (8)$$

Dalla prima equazione si ricava immediatamente:

$$T_2 = \frac{m_2 g}{2} + T_1 = \frac{m_2 g}{2} + \frac{3\sqrt{2} m_1 g}{4} \quad (9)$$

Eguagliando infine la (7) e la (9) si ha:

$$\frac{m_2 g}{2} + \frac{3\sqrt{2} m_1 g}{4} = \frac{\sqrt{2} m_3 g}{4} \Rightarrow m_3 = 3m_1 + \sqrt{2} m_2 = 5.83 \text{ kg} \quad (10)$$

3) Poiché il valore di m_3 non corrisponde ad una situazione di equilibrio nel sistema di quiete del blocco, le tre masse sono in moto relativo rispetto al blocco stesso. Tuttavia, dato che la corda è inestensibile, il modulo delle tre accelerazioni relative $\vec{a}_1^R$, $\vec{a}_2^R$ e $\vec{a}_3^R$ deve essere eguale. Inoltre $\vec{a}_2^R$ è orizzontale, $\vec{a}_1^R$ è diretto a 45° con componenti verticale ed orizzontale entrambe positive e $\vec{a}_3^R$ è diretto a 45° con componente orizzontale positiva e componente verticale negativa. Applicando la legge di trasformazione delle accelerazioni possiamo riscrivere il sistema (1) come segue:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 (\vec{a}_1^R + \vec{A}) = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 (\vec{a}_2^R + \vec{A}) = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{R}_2 \\ m_3 \vec{a}_3 = m_3 (\vec{a}_3^R + \vec{A}) = m_3 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R}_3 \end{cases} \quad (11)$$

in cui le espressioni delle tensioni e delle reazioni sono a priori diverse da quelle ricavate in precedenza, con l'eccezione di $\vec{R}_2$ dato che il moto della massa m_2 in verticale è nullo esattamente come prima. Tenendo conto delle direzioni delle accelerazioni relative ed indicando con a_R il loro modulo comune si ha:

$$\begin{cases} m_1 \left[\left(a_R \frac{\sqrt{2}}{2} + A \right) \hat{x} + a_R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right] = -m_1 g \hat{y} + (T_1 - R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + (T_1 + R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \\ m_2 (a_R + A) \hat{x} = (T_2 - T_1) \hat{x} + (-m_2 g + R_2) \hat{y} \\ m_3 \left[\left(a_R \frac{\sqrt{2}}{2} + A \right) \hat{x} - a_R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right] = -m_3 g \hat{y} + (R_3 - T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + (R_3 + T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \end{cases} \quad (12)$$

dove $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono, come usuale, l'asse orizzontale e quello verticale. Le equazioni per m_1 diventano quindi:

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + A \right) = m_1 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + \frac{g}{2} \right) = (T_1 - R_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_1 a_R = (T_1 - R_1) - \frac{m_1 g \sqrt{2}}{2} \\ m_1 a_R = (T_1 + R_1) - m_1 g \sqrt{2} \end{cases} \quad (13)$$

da cui:

$$(T_1 + R_1) - m_1 g \sqrt{2} - (T_1 - R_1) + \frac{m_1 g \sqrt{2}}{2} = 2R_1 - \frac{m_1 g \sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{m_1 g \sqrt{2}}{4} \quad (14)$$

$$(T_1 + R_1) - m_1 g \sqrt{2} + (T_1 - R_1) - \frac{m_1 g \sqrt{2}}{2} = 2T_1 - \frac{3m_1 g \sqrt{2}}{2} = 2m_1 a_R \Rightarrow T_1 = m_1 \left(a_R + \frac{3g\sqrt{2}}{4} \right) \quad (15)$$

Invece per m_3 si ha:

$$\begin{cases} m_3 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + A \right) = m_3 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + \frac{g}{2} \right) = (R_3 - T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_3 a_R = (R_3 - T_2) - \frac{m_3 g \sqrt{2}}{2} \\ m_3 a_R = -(T_2 + R_3) + m_3 g \sqrt{2} \end{cases} \quad (16)$$

da cui:

$$-(T_2 + R_3) + m_3 g \sqrt{2} - (R_3 - T_2) + \frac{m_3 g \sqrt{2}}{2} = -2R_3 + \frac{3m_3 g \sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_3 = \frac{3m_3 g \sqrt{2}}{4} \quad (17)$$

$$-(T_2 + R_3) + m_3 g \sqrt{2} + (R_3 - T_2) - \frac{m_3 g \sqrt{2}}{2} = -2T_2 + \frac{m_3 g \sqrt{2}}{2} = 2m_3 a_R \Rightarrow T_2 = m_3 \left(-a_R + \frac{g\sqrt{2}}{4} \right) \quad (18)$$

Infine per m_2 si ricava:

$$m_2 (a_R + A) = m_2 \left(a_R + \frac{g}{2} \right) = (T_2 - T_1) \quad (19)$$

$$-m_2 g + R_2 = 0 \quad (20)$$

Combinando la (15), la (18) e la (19) si determina il valore di a_R :

$$\begin{aligned} m_2 a_R &= (T_2 - T_1) - \frac{m_2 g}{2} = m_3 \left(-a_R + \frac{g\sqrt{2}}{4} \right) - m_1 \left(a_R + \frac{3g\sqrt{2}}{4} \right) - \frac{m_2 g}{2} \Rightarrow \\ a_R (m_1 + m_2 + m_3) &= \frac{g}{4} (m_3 \sqrt{2} - 3m_1 \sqrt{2} - 2m_2) \Rightarrow a_R = \frac{g}{4} \left(\frac{m_3 \sqrt{2} - 3m_1 \sqrt{2} - 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = 1.43 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Le forze di tensione si ottengono per sostituzione nella (15) e nella (18):

$$T_1 = m_1 \left(a_R + \frac{3g\sqrt{2}}{4} \right) = 11.8 \text{ N}; \quad T_2 = m_3 \left(-a_R + \frac{g\sqrt{2}}{4} \right) = 24.4 \text{ N} \quad (22)$$

4) La forza $\vec{F}$ è l'unica forza esterna al sistema in direzione orizzontale per cui (attenzione a non scordarsi il blocco di massa m !):

$$\begin{aligned} F_x = F &= (m_1 + m_2 + m_3 + m)a_{CM} = (m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + m_3 a_{3x} + mA) = \\ &= m_1 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + A \right) + m_2 (a_R + A) + m_3 \left(\frac{a_R \sqrt{2}}{2} + A \right) + mA = \\ &= a_R \left(\frac{\sqrt{2}}{2} m_1 + m_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_3 \right) + \frac{g}{2} (m_1 + m_2 + m_3 + m) = 334.5 \text{ N} \end{aligned} \quad (23)$$

Esercizio 2

1) Il momento di inerzia del disco con attaccata la massa m_1 si ottiene dalla relazione:

$$I = I_{disco} + m_1 d^2 = \frac{MR^2}{2} + m_1 d^2 \quad (24)$$

Consideriamo come sistema il disco, le masse m_1 e m_2 e la terra (per descrivere l'interazione gravitazionale attraverso l'energia potenziale). L'unica forza esterna presente è la reazione del vincolo dell'asse del disco che tuttavia non compie lavoro per cui l'energia meccanica del sistema si conserva. Scriviamo la conservazione dell'energia considerando come istante iniziale quello in cui il sistema non si è ancora messo in moto e come istante finale quello in cui la corda si è srotolata di una lunghezza h :

$$E_i = K_i + U_i = m_2 g h + 0; \quad E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + 0 \quad (25)$$

$$E_i = E_f \quad (26)$$

Poiché la fune è inestensibile si ha: $V_2 = \omega R$, per cui si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_2 g h}{I + m_2 R^2}} \quad (27)$$

2) Le forze agenti sulla massa m_2 sono la tensione del filo che indichiamo con $\vec{T}$ e la forza peso. Indichiamo con $\vec{a}$ l'accelerazione di m_2 :

$$\vec{T} + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a} \quad (28)$$

Considerando un asse z verticale e diretto come in figura verso l'alto la (28) diventa:

$$T - m_2 g = -m_2 a = -m_2 \alpha R \quad (29)$$

in quanto la corda non slitta sulla carrucola. Per il disco possiamo utilizzare la seconda equazione cardinale: l'unica forza con momento non nullo rispetto al polo O centro del disco è la tensione del filo, per cui si ha:

$$\vec{R} \wedge \vec{T} = I \vec{\alpha} \Rightarrow TR = I \alpha \Rightarrow T = \frac{I \alpha}{R} \quad (30)$$

Utilizzando la (29) e la (30) si ottiene:

$$\alpha = \frac{m_2 g R}{\frac{MR^2}{2} + m_1 d^2 + m_2 R^2}; \Rightarrow T = \frac{I \alpha}{R} = m_2 g \frac{MR^2 + 2m_1 d^2}{MR^2 + 2m_1 d^2 + 2m_2 R^2} \quad (31)$$

L'accelerazione angolare e la tensione non dipendono da t_1 . Per determinare la lunghezza del filo $l(t_1)$ rispetto alla posizione iniziale si può utilizzare la relazione: $l(t_1) = R\theta(t_1)$ dove:

$$\theta(t_1) = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad (32)$$

da cui:

$$l(t_1) = \frac{m_2 g R^2}{MR^2 + 2m_1 d^2 + 2m_2 R^2} t_1^2 \quad (33)$$

3) Il chiodo è l'unico oggetto che può esercitare una forza nel piano del disco e quindi deve fornire una forza in grado di mantenere in rotazione la massa m_1 . Le componenti tangenziale e radiale della forza che il chiodo esercita su m_1 si ottengono quindi scrivendo la seconda legge della dinamica per la massa m_1 . Conoscendo le componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione all'istante t_1 si ha:

$$F_T = m_1 \alpha d; \quad F_R = m_1 (-\omega^2 d) \quad (34)$$

dove i versi dei versori radiale e tangenziale sono rispettivamente uscente dal disco ed antiorario.

4) Per trovare la velocità del disco e quindi della massa m_2 quando il chiodo si rompe si può imporre la conservazione del momento angolare lungo l'asse z (L_z), considerando come polo il centro del disco: infatti non sono presenti forze impulsive che possano alterare il momento angolare, per cui L_z non cambia durante l'intervallo di tempo in cui il chiodo si rompe. Detti quindi I' e ω' il momento d'inerzia del disco e la velocità angolare del disco dopo la rottura del chiodo otteniamo dalla conservazione di L_z :

$$I\omega = I'\omega' + m_1 d^2 \omega' = (I' + m_1 d^2) \omega' = I\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega' \quad (35)$$

Quindi il disco subito dopo la rottura del chiodo ruota con la stessa velocità angolare che aveva immediatamente prima della rottura:

$$\omega' = \omega(t_1) = \alpha t_1 \quad (36)$$

Dopo l'istante t_1 cambia però l'accelerazione angolare che diventa:

$$\alpha' = \frac{T'}{I'R} = \frac{m_2 g R}{\frac{MR^2}{2} + m_2 R^2} = \frac{m_2 g}{\left(\frac{M}{2} + m_2\right) R} \quad (37)$$

in cui T' è la nuova tensione del filo, legata a α' da una relazione analoga alla (30). All'istante t_2 la lunghezza di corda che si è srotolata è quindi:

$$l(t_2) = l(t_1) + R\theta(t_2) = l(t_1) + R\left(\frac{1}{2} \alpha' (t_2 - t_1)^2 + \omega(t_1)(t_2 - t_1)\right) \quad (38)$$