Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 20/02/2018

Esercizio 1

1) Poiché il sistema è soggetto a sole forze conservative si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Se il vagone scende di un tratto L, la sua quota diminuisce di $\Delta h = L\sin\theta$; si ha quindi:

$$\Delta U = -Mg\Delta h = -MgL\sin\theta = -\Delta K = -\left(\frac{MV^2(L)}{2} + 2\frac{I_G\omega^2(L)}{2} - 0\right) = -\left(\frac{MV^2(L)}{2} + I_G\omega^2(L)\right) \quad (1)$$

dove $V(L)$ e $\omega(L)$ sono la velocità del vagone e la velocità angolare delle ruote dopo che il vagone ha percorso il tratto L. In virtù delle proprietà del moto di puro rotolamento la relazione fra $V(L)$, $\omega(L)$ ed il raggio r delle ruote è:

$$V(L) = r\omega(L) \quad (2)$$

per cui, sostituendo nella (1) ed eliminando il segno meno, si ottiene:

$$MgL\sin\theta = V^2(L)\left(\frac{M}{2} + \frac{I_G}{r^2}\right) = V^2(L)\left(\frac{Mr^2+2I_G}{2r^2}\right) \Longrightarrow V^2(L) = \frac{2r^2MgL\sin\theta}{Mr^2+2I_G} \Longrightarrow V(L) = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}}} \quad (3)$$

La formula (3) mostra esplicitamente come a causa dell'energia cinetica di rotazione la velocità del vagone sia inferiore a quella di un punto materiale che scivola per un tratto identico su un piano inclinato senza attrito.

2) Per ricavare l'accelerazione del vagone si può utilizzare l'equazione del moto oppure sfruttare il fatto che l'energia meccanica è costante, per cui la sua derivata è nulla. Il vantaggio di quest'ultima procedura è che non coinvolge le forze di attrito statico, il cui lavoro è zero e che devono essere determinate nella prossima domanda. Rispondiamo comunque alla domanda in entrambi i modi.

a) Indichiamo con x un tratto generico percorso dal vagone lungo il carrello. Ponendo lo zero dell'energia potenziale nell'estremo <u>superiore</u> del binario, l'energia potenziale $U(x)$ è $U(x) = -Mgx\sin\theta$; l'energia totale ha dunque l'espressione:

$$E = K(x) + U(x) = V^2(x)\left(\frac{Mr^2+2I_G}{2r^2}\right) - Mgx\sin\theta \quad (4)$$

dove per l'energia cinetica è stata utilizzata l'ultima espressione ricavata nella (3). Essendo l'energia costante si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = 2V(x)a(x)\left(\frac{Mr^2+2I_G}{2r^2}\right) - MgV(x)\sin\theta \qquad \Longrightarrow a(x) = \frac{Mgr^2\sin\theta}{Mr^2+2I_G} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}} \quad (5)$$

b) Scriviamo l'equazione del moto del vagone e la seconda equazione cardinale per la rotazione delle due ruote intorno al loro asse baricentrale in forma di sistema:

$$\begin{cases} M\vec{a} = M\vec{g}\sin\theta + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 = I_G\vec{\alpha}_1 \\ \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = I_G\vec{\alpha}_2 \end{cases} \quad (6)$$

Il sistema (6) è completato dalle condizioni di puro rotolamento per l'accelerazione delle ruote:

$$\vec{a}_1 = \vec{\alpha}_1 \Lambda\, \vec{r}_1; \quad \vec{a}_2 = \vec{\alpha}_2 \Lambda\, \vec{r}_2 \tag{7}$$

Ora osserviamo che per simmetria $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_A$ e che per la condizione di corpo rigido $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$; $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}$; inoltre le forze di attrito sono ortogonali ai raggi e opposte alla componente della forza di gravità parallela al piano di discesa. Pertanto, inserendo queste osservazioni e passando alla forma scalare il sistema (6) diventa:

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - 2F_A \\ rF_A = I_G\alpha \\ a = \alpha r \end{cases} \tag{8}$$

Sostituendo la seconda e la terza equazione nella prima si ottiene:

$$Ma = Mg\sin\theta - \frac{2I_G\alpha}{r} = Mg\sin\theta - \frac{2I_G a}{r^2} \;\Longrightarrow a\left(M + \frac{2I_G}{r^2}\right) = Mg\sin\theta \;\Longrightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}} \tag{9}$$

come nella (5).

3) Come già osservato, per simmetria $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_A$. Dalla prima equazione del sistema (8) ricaviamo:

$$F_A = \frac{M(g\sin\theta - a)}{2} = \frac{Mg\sin\theta}{2}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}}\right) = \frac{Mg\sin\theta}{2}\left(\frac{\frac{2I_G}{Mr^2}}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}}\right) = \frac{Mg\sin\theta}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{Mr^2}{2I_G}}\right) = \left(\frac{Mg\sin\theta}{2+\frac{Mr^2}{I_G}}\right) \tag{10}$$

4) In condizioni di equilibrio il pendolo è fermo nel sistema di riferimento del vagone, per cui l'accelerazione relativa $\vec{a}'$ della massa m deve essere nulla. Quindi, chiamando $\vec{T}$ la tensione del filo, l'equazione del moto della massa m nel riferimento del vagone è:

$$m\vec{a}' = 0 = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} \tag{11}$$

dove il termine $-m\vec{a}$ corrisponde alla forza apparente dovuta al moto accelerato del vagone. La forza di tensione è diretta lungo il filo, per cui per determinare l'angolo φ è sufficiente ricavare le componenti di $\vec{T}$ nella direzione parallela e perpendicolare al moto del vagone. Indicando con x un asse parallelo al moto del vagone e con y un asse ad esso ortogonale diretto verso l'alto si ha, tenendo conto dell'inclinazione del piano:

$$\vec{T} = -(m\vec{g} - m\vec{a}) = m(\vec{a} - \vec{g}) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} T_x = m(a - g\sin\theta) = mg\sin\theta\left(\frac{1}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}} - 1\right) = -\frac{mg\sin\theta}{1+\frac{2I_G}{Mr^2}}\frac{2I_G}{Mr^2} = -\frac{2I_G mg\sin\theta}{2I_G + Mr^2} \\ T_y = mg\cos\theta \end{cases} \tag{12}$$

Per l'angolo φ è quindi valida la relazione:

$$\tan\varphi = \left|\frac{T_x}{T_y}\right| = \frac{2I_G mg\sin\theta}{2I_G + Mr^2}\frac{1}{mg\cos\theta} = \frac{2I_G}{2I_G + Mr^2}\tan\theta \tag{13}$$

dove si è scelto come verso positivo dell'angolo φ quello in Figura (a partire dalla verticale).

Esercizio 2

1) Poiché C_2 è un conduttore il campo elettrico al suo interno deve essere nullo. Consideriamo allora una sfera gaussiana concentrica a C_2 e di raggio r compreso fra R_2 e R_1. La superficie di questa sfera è interamente all'interno di C_2, per cui il flusso attraverso essa è zero e di conseguenza anche la carica al suo interno deve essere nulla. Poiché la sfera gaussiana contiene la carica Q_3, sulla superficie di raggio R_2 deve depositarsi una carica indotta $-Q_3$ e per la conservazione della carica elettrica sulla superficie di raggio R_1 deve depositarsi una carica $+Q_3$ in aggiunta a Q_2. Le cariche totali sulle due superfici del conduttore sono quindi:

$$Q(R_1) = Q_2 + Q_3 = -4 \text{ nC}; \quad Q(R_2) = -Q_3 = +2 \text{ nC} \tag{14}$$

2) Il campo elettrico nel punto P si ottiene applicando il principio di sovrapposizione, ricordando che per il principio dello schermaggio elettrostatico la sfera di raggio R_3 non influisce in maniera diretta sul campo, ma solo tramite l'induzione, a seguito della quale sulla superficie esterna di R_2 si deposita una carica Q_3 in aggiunta a quella originaria. Il campo è quindi:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(d/2)^2}\hat{r}_{C_1\to P} + \frac{(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0(d/2)^2}\hat{r}_{C_2\to P} \tag{15}$$

dove $\hat{r}_{C_1\to P}$ è il versore dal centro della sfera C_1 al punto P e $\hat{r}_{C_2\to P}$ è il versore dal centro del conduttore C_2 al punto P. Poiché il punto P è al centro della linea che congiunge i centri della sfera C_1 e del conduttore, i due versori sono eguali ed opposti; introducendo quindi per semplicità $\hat{r} = \hat{r}_{C_1\to P}$ si ha:

$$\vec{E}(P) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2}\hat{r} - \frac{(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2}\hat{r} = \frac{Q_1-(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2}\hat{r} = \frac{6-(-2-2)\times 10^{-9}C}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}\left(\frac{2}{2}\right)^2}\hat{r}\ (\text{V/m}) = 89.9\ \hat{r}\ (\text{V/m}) \tag{16}$$

3) La differenza di potenziale fra le sfere C_1 e C_3 si calcola integrando il campo elettrico nelle regioni comprese rispettivamente fra la sfera C_1 ed il conduttore C_2 e fra il conduttore C_2 e la sfera C_3. Nel primo caso il campo elettrico è ricavabile adattando opportunamente la (15), mentre nel secondo bisogna ricordare che $\vec{E}(r)$ è nullo per $R_2 < r < R_1$ (cioè all'interno di C_2), ma non per $R_3 < r < R_2$. Abbiamo allora:

$$V(C_1) - V(C_3) = V(C_1) - V(C_2) + V(C_2) - V(C_3) = -\int_{C_2}^{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{C_3}^{C_2}\vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{17}$$

Per calcolare il primo termine indichiamo con x la distanza dal centro della sfera C_1 di un punto generico appartenente al segmento che congiunge il centro di C_1 con quello del conduttore C_2. Pertanto, ricordando le osservazioni con cui si è giunti alla (16):

$$-\int_{C_2}^{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{d-R_1}^{R_1}\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}\right)\hat{x}\cdot d\vec{x} = +\int_{R_1}^{d-R_1}\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}\right)dx \tag{18}$$

I due integrali valgono rispettivamente:

$$+\int_{R_1}^{d-R_1}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2}dx = -\left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x}\right]_{R_1}^{d-R_1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d-R_1}\right) \tag{19a}$$

$$-\int_{R_1}^{d-R_1}\frac{(Q_2+Q_3)}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2}dx = +\left[\frac{Q_2+Q_3}{4\pi\varepsilon_0 x}\right]_{R_1}^{d-R_1} = -\frac{Q_2+Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d-R_1}\right) \tag{19b}$$

per cui in conclusione:

$$V(C_1) - V(C_2) = \frac{Q_1 - (Q_2 + Q_3)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d - R_1}\right) = \frac{Q_1 + (|Q_2| + |Q_3|)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d - R_1}\right) \tag{20}$$

Nella regione di spazio compresa fra i raggi R_3 e R_2, dette r la distanza radiale di un punto dal centro della sfera C_3 e $\hat{r}$ il versore radiale uscente dal centro di C_3, il campo elettrico ha l'espressione coulombiana:

$$\vec{E}(R_3 < r < R_2) = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{21}$$

Pertanto:

$$-\int_{C_3}^{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_3}^{R_2} \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_3}^{R_2} \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = \frac{|Q_3|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{22}$$

Combinando i due termini si ottiene quindi:

$$V(C_1) - V(C_3) = \frac{Q_1 + (|Q_2| + |Q_3|)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d - R_1}\right) + \frac{|Q_3|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}\left(10 \times 10^{-9}\left(\frac{1}{0.2} - \frac{1}{1.8}\right) + 2 \times 10^{-9}\left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.15}\right)\right) \mathrm{V} = \frac{10^3}{4\pi \times 8.85}\left(10 \times (5 - 0.556) + 2 \times (10 - 6.667)\right) \mathrm{V} = 459.5 \mathrm{~V} \tag{23}$$

4) Osserviamo innanzitutto che il campo all'interno del conduttore C_2 deve rimanere nullo per cui, essendo la sfera C_3 isolata dal resto del sistema, la carica sulla superficie di raggio R_2 deve essere sempre $-Q_3$. La ridistribuzione di carica avviene quindi solo fra la superficie di C_1 e la superficie esterna di C_2, entrambe di raggio R_1. Dopo essere stati collegati tramite il filo conduttore, C_1 e C_2 sono equipotenziali, per cui:

$$V'(C_1) - V'(C_2) = 0 \tag{24}$$

D'altra parte la (20) mostra che la differenza di potenziale fra C_1 e C_2 è proporzionale alla differenza fra le cariche presenti sulle superfici di raggio R_1 della sfera e del conduttore; chiamando quindi Q_1' e Q_2' le cariche presenti su queste due superfici dopo il collegamento, la condizione (24) equivale a:

$$Q_1' = Q_2' \tag{25}$$

Inoltre per la conservazione della carica si ha:

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + (Q_2 + Q_3) = Q_1 - (|Q_2| + |Q_3|) = 2 \mathrm{~nC} \tag{26}$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$Q_1' = Q_2' = 1 \mathrm{~nC} \tag{27}$$