Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 02/02/2018

Esercizio 1

1) Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione, in quanto la reazione dell'asse è per definizione applicata sull'asse stesso, mentre la forza di gravità e la reazione del piano hanno momenti eguali ed opposti, sia sulla sbarretta che sul proiettile. Il momento angolare prima dell'urto è dovuto al moto del proiettile e dopo l'urto alla rotazione del sistema sbarretta + proiettile. Possiamo quindi scrivere, fissato un asse $\hat{z}$ ortogonale al piano del moto:

$$\vec{L}_{in} = mlV\hat{z} = I_{tot}\vec{\omega} = \left(\frac{M(2l)^2}{12} + ml^2\right)\vec{\omega} = \left(\frac{M}{3} + m\right)l^2\vec{\omega} = \left(\frac{M+3m}{3}\right)l^2\vec{\omega} \tag{1}$$

Ricaviamo quindi la velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{mlV\hat{z}}{l^2}\left(\frac{3}{M+3m}\right) = \left(\frac{3m}{M+3m}\right)\frac{V}{l}\hat{z} \tag{2}$$

Per determinare la velocità del centro di massa è necessario preliminarmente determinarne la posizione rispetto all'asse di rotazione: poiché il centro di massa della sbarretta è fisso e sull'asse, la posizione del centro di massa del sistema, misurata dal centro della sbarretta e lungo la sbarretta stessa, è:

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{m}{M+m}\right)l\hat{R} \tag{3}$$

dove $\hat{R}$ è un asse radiale uscente dal centro della sbarretta. La velocità del centro di massa è quindi:

$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega}\land\vec{R}_{CM} = \left(\frac{3m}{M+3m}\right)\frac{V}{l}\left(\frac{ml}{M+m}\right)\hat{z}\land\hat{R} = \left[\frac{3m^2V}{(M+3m)(M+m)}\right]\hat{\theta} \tag{4}$$

avendo fissato l'asse tangenziale $\hat{\theta}$ perpendicolare a $\hat{R}$ e $\hat{z}$ e concorde con una terna levogira.

2) La quantità di moto iniziale è dovuta al solo proiettile e vale:

$$\vec{P}_{in} = m\vec{V} \tag{5}$$

Per scrivere l'espressione della quantità di moto dopo l'urto si può ragionare in due modi:

a) il centro di massa della sbarretta è comunque fermo, per cui la quantità di moto del sistema sbarretta + proiettile si riduce a quella del proiettile dopo l'urto. Poiché il proiettile compie un moto circolare di raggio l intorno al centro della sbarretta, si ottiene:

$$\vec{P}_{fin} = m(\vec{\omega}\land\vec{l}) = m\left(\frac{3m}{M+3m}\right)\frac{V}{l}l\hat{V} = \frac{3m^2\vec{V}}{M+3m} \tag{6a}$$

b) la quantità di moto di un sistema è per definizione la massa totale moltiplicata per la velocità del centro di massa (formula (4)), per cui:

$$\vec{P}_{fin} = (M+m)\left[\frac{3m^2V}{(M+3m)(M+m)}\right]\hat{\theta} = \frac{3m^2V}{M+3m}\hat{\theta} = \frac{3m^2\vec{V}}{M+3m} \tag{6b}$$

come nella (6a). L'ultimo passaggio si giustifica notando che subito dopo l'urto il versore $\hat{\theta}$ è ortogonale alla direzione di riposo della sbarretta, per cui è allineato con $\vec{V}$. In entrambi i casi, ricordando che l'impulso $\vec{I}$ fornito dall'asse è eguale alla variazione della quantità di moto del sistema, si ricava:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in} = \frac{3m^2\vec{V}}{M+3m} - m\vec{V} = m\vec{V}\left(\frac{3m}{M+3m} - 1\right) = -\frac{mM}{M+3m}\vec{V} \tag{7}$$

L'energia cinetica iniziale è chiaramente dovuta al solo moto del proiettile, per cui:

$$K_{in} = \frac{mV^2}{2} \tag{8}$$

Per determinare l'energia cinetica finale si può procedere, anche in questo caso, o considerando il moto di rotazione della sbarretta e del proiettile dopo l'urto o considerando il moto del centro di massa del sistema e la rotazione del sistema intorno al centro di massa. La seconda strada è chiaramente molto più laboriosa, per cui scegliamo la prima:

$$K_{fin} = \frac{m\left(\vec{\omega}\wedge\vec{l}\right)^2}{2} + \frac{I_{CM}\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2 l^2}{2} + \frac{M(2l)^2\omega^2}{2\times 12} = \frac{\omega^2 l^2}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right) = \frac{\omega^2 l^2}{2}\left(\frac{3m+M}{3}\right) \tag{9}$$

L'energia dissipata nell'urto è quindi:

$$\Delta K = K_{fin} - K_{in} = \frac{\omega^2 l^2}{2}\left(\frac{3m+M}{3}\right) - \frac{mV^2}{2} = \left(\frac{3m}{M+3m}\right)^2\left(\frac{3m+M}{3}\right)\frac{V^2}{l^2}\frac{l^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = \frac{mV^2}{2}\left(\frac{3m}{M+3m} - 1\right) = -\frac{mV^2}{2}\left(\frac{M}{M+3m}\right) \tag{10}$$

3) Il proiettile dopo l'urto compie un moto circolare (uniforme) di raggio l intorno all'asse di rotazione, per cui l'asse deve esercitare una forza centripeta $\vec{F}_C$ tale da mantenere il proiettile stesso sulla traiettoria. Si ha pertanto:

$$\vec{F}_C = -m\omega^2 l\hat{R}(t) = -\frac{9m^2}{(M+3m)^2}\frac{V^2}{l}\hat{R}(t) \tag{11}$$

dove $\hat{R}(t)$ è un versore diretto istantaneamente lungo la direzione delle bacchetta. Poiché all'istante iniziale $\hat{R}(t)$ è verticale e diretto verso il basso, come nella Figura del testo, le componenti di $\hat{R}(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano con gli assi x e y rispettivamente perpendicolare e parallelo alla direzione iniziale della sbarretta sono:

$$\hat{R}(t) = (\sin(\omega t), -\cos(\omega t)) \tag{12}$$

4) Dopo la rimozione dell'asse il sistema è soggetto solo alla forza peso ed alla reazione normale del piano liscio, che sono eguali ed opposte; conseguentemente il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Il modulo della velocità del centro di massa è stato calcolato nella (4) per cui, scegliendo come suggerito nel testo l'asse x nella direzione della velocità del centro di massa nell'istante t^* di rimozione dell'asse, si ha:

$$\vec{V}_{CM}(t > t^*) = \left[\frac{3m^2V}{(M+3m)(M+m)}\right]\hat{x} \tag{13}$$

Esercizio 2

1) Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nel perno, l'asse z entrante nel piano della figura, l'asse x rivolto verso sinistra e l'asse y verso l'alto. Questo sistema di riferimento è un'usuale terna levogira ($\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$), scelta in modo che il campo $\vec{B}$ sia diretto nel verso positivo dell'asse z. Abbiamo quindi:

$$\vec{B} = B\hat{z}; \quad \vec{g} = -g\hat{y}; \quad \vec{l} = l(\hat{x}\sin\theta_0 - \hat{y}\cos\theta_0) \tag{14}$$

dove $\vec{l}$ è il vettore che esprime la direzione e la lunghezza della bacchetta misurata dal perno. In assenza di corrente la bacchetta si trova in posizione verticale, mentre si discosta da essa quando l'interazione fra corrente e campo di induzione magnetica produce la forza di Laplace che, essendo ortogonale alla direzione del campo e della bacchetta, è inizialmente diretta lungo l'asse x (non specifichiamo se positivo o negativo). La forza di Laplace ha quindi momento non nullo rispetto al perno e tende a far ruotare la bacchetta, ma quando quest'ultima si discosta dalla verticale si genera anche un momento di richiamo dovuto alla gravità che contrasta la rotazione. Nell'istante iniziale la forza infinitesima di Laplace è:

$$d\vec{F}_{LAP} = Id\vec{l} \wedge \vec{B} = IdlB(-\hat{y}) \wedge \hat{z} = -IdlB\hat{x} \tag{15}$$

per cui è diretta verso destra se la corrente è positiva, cioè antioraria, ed all'interno della bacchetta scorre verso il basso. Ma la figura del testo mostra che l'angolo θ_0 si trova sulla sinistra della verticale, per cui la forza di Laplace deve avere verso opposto e quindi la corrente deve essere oraria ed all'interno della bacchetta essa scorre verso l'alto.

Chiaramente se la corrente fosse antioraria la bacchetta raggiungerebbe la sua posizione di equilibrio in corrispondenza di un angolo $-\theta_0$, cioè della stessa ampiezza, ma posizionato alla destra della verticale.

2) Come osservato nel punto 1), il valore dell'angolo θ_0 è determinato dalla condizione di equilibrio fra i momenti rispetto al perno dovuti alla forza di gravità ed alla forza di Laplace. L'unica altra forza agente sul sistema è la reazione del perno che per definizione è applicata nel perno stesso, per cui non può avere momento rispetto ad esso. Essendo la forza di gravità applicata nel centro di massa della bacchetta, il suo momento si calcola immediatamente:

$$\vec{\tau}_{m\vec{g}} = \vec{R} \wedge m\vec{g} = \frac{\vec{l}}{2} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2}(\hat{x}\sin\theta_0 - \hat{y}\cos\theta_0) \wedge (-mg\hat{y}) = -\frac{mgl\sin\theta_0}{2}\hat{z} \tag{16}$$

Per il calcolo del momento associato alla forza di Laplace occorre osservare che il momento infinitesimo associato alla forza (15) varia da punto a punto della bacchetta, essendo proporzionale alla distanza di tale punto dal perno. Inoltre bisogna notare che la forza è diretta lungo l'asse x solo nell'istante iniziale, ma che per costruzione è sempre ortogonale alla bacchetta ed al campo $\vec{B}$. Scriviamo quindi nella forma più generale:

$$d\vec{\tau}_{Lap} = \vec{r} \wedge d\vec{F} = I\vec{r} \wedge \left(d\vec{l} \wedge \vec{B}\right) = I\left(\left(\vec{r}\cdot\vec{B}\right)d\vec{l} - \left(\vec{r}\cdot d\vec{l}\right)\vec{B}\right) = -IdlBr\hat{z} = |I|dlBr\hat{z} \tag{17}$$

dove $\vec{r}$ è il raggio vettore condotto dal perno all'elemento infinitesimo $d\vec{l}$ (si ricordi che la corrente è negativa). Poiché r varia fra 0 e l, il momento totale dovuto alla forza di Laplace è:

$$\vec{\tau}_{Lap} = \int_0^l |I|Br\,dl\,\hat{z} = \hat{z}B|I|\frac{l^2}{2} \tag{18}$$

Imponendo la condizione di equilibrio con la (16) si ha:

$$\vec{\tau}_{m\vec{g}} + \vec{\tau}_{Lap} = \hat{z}\frac{l}{2}(-mg\sin\theta_0 + B|I|l) = 0 \tag{19}$$

da cui:

$$B = \frac{mg\sin\theta_0}{|I|l} = \frac{0.15 \times 9.8 \times \sin(13^0)}{12 \times 1}\text{T} = 27.6 \text{ mT} \tag{20}$$

In alternativa è possibile considerare il sistema di forze e scomporlo in direzione parallela e perpendicolare alla bacchetta. Poiché la reazione del perno è sempre parallela alla direzione della bacchetta, la somma delle forze in direzione ortogonale ad essa è data dalla forza di Laplace $\vec{F}_{LAP}$ e dalla componente perpendicolare della forza peso. Il modulo di $\vec{F}_{LAP}$ si ottiene immediatamente integrando la (15), mentre la componente della forza peso in direzione ortogonale alla bacchetta è data semplicemente da $mg\sin\theta_0$. Si ottiene quindi, come nella (20):

$$B = \frac{mg\sin\theta_0}{|I|l} = 27.6 \text{ mT} \tag{20bis}$$

3) La reazione $\vec{T}$ del perno si determina imponendo che all'equilibrio la somma delle forze agenti sulla bacchetta sia nulla. Si ha quindi:

$$\vec{F}_{Lap} + m\vec{g} + \vec{T} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{T} = -(\vec{F}_{Lap} + m\vec{g}) \tag{21}$$

L'espressione della forza peso è indipendente dall'angolo θ, mentre quella di $\vec{F}_{Lap}$ deve essere calcolata riscrivendo la (15) nella forma generale per un θ arbitrario. Dunque:

$$d\vec{F}_{LAP}(\theta) = Id\vec{l}(\theta) \wedge \vec{B} = Idl(\hat{x}\sin\theta - \hat{y}\cos\theta) \wedge B\hat{z} = IdlB(-\hat{y}\sin\theta - \hat{x}\cos\theta) \tag{22}$$

La forza $\vec{F}_{Lap}(\theta)$ si ottiene quindi integrando la (22) sulla bacchetta, ovvero rimpiazzando dl con l; inoltre, essendo I negativa, conviene come nella (17) cambiare il segno ed utilizzare $|I|$. Sostituendo nella (21) si ricava perciò:

$$\vec{T} = -(|I|lB(\hat{y}\sin\theta + \hat{x}\cos\theta) - mg\hat{y}) = \hat{y}(mg - |I|lB\sin\theta) - \hat{x}|I|lB\cos\theta \tag{23}$$

All'equilibrio (vedi la (19) e la (20))

$$|I|lB = mg\sin\theta_0 \tag{24}$$

per cui:

$$\vec{T}_{eq} = mg\cos\theta_0\,[\hat{y}\cos\theta_0 - \hat{x}\sin\theta_0] = (1.396\,\hat{y} - 0.322\,\hat{x})\text{ N} \tag{25}$$

Invece all'istante iniziale ($\theta = 0$) il sistema non è all'equilibrio, per cui la (21) diventa:

$$\vec{F}_{Lap} + m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \tag{26}$$

Anche se per $\theta = 0$ la bacchetta è parallela alla forza peso, $m\vec{g}$ e $\vec{T}$ <u>non</u> si annullano: se così fosse, non essendoci lungo l'asse x altre forze oltre a $\vec{F}_{Lap}$, l'intera bacchetta si muoverebbe di moto accelerato traslazionale, mentre è evidente che l'estremo connesso al perno non si muove e la bacchetta ruota. Il calcolo è quindi più elaborato. Per $\theta = 0$ solo $\vec{F}_{Lap}$ ha momento non nullo per cui, detti I il momento d'inerzia della bacchetta ed $\vec{\alpha}$ la sua accelerazione angolare, si ha:

$$\vec{\tau}_{Lap} = \hat{z}\frac{B|I|l^2}{2} = I\vec{\alpha} = \frac{ml^2}{3}\vec{\alpha} \qquad \Longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{3B|I|}{2m}\hat{z} \tag{27}$$

Ricordando la relazione fra $\vec{\alpha}, \vec{a}_{CM}$ e $\vec{R}_{CM} = -(l/2)\hat{y}$ si ottiene quindi:

$$\vec{a}_{CM} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}_{CM} = \frac{3B|I|}{2m}\hat{z} \wedge \left(-\frac{l}{2}\right)\hat{y} = \frac{3Bl|I|}{4m}\hat{x} \tag{28}$$

4) La (24) mostra che B è proporzionale a $\sin\theta_0$, che raggiunge il suo valore massimo $\sin\theta_0 = 1$ per $\theta_0 = 90^0$. Il massimo campo di induzione magnetica misurabile B_{max} è quello che porta la bacchetta in posizione orizzontale, ovvero:

$$B_{max} = \frac{mg}{|I|l} = \frac{0.15 \times 9.8}{12 \times 1}\,\mathrm{T} = 123\ \mathrm{mT} \tag{29}$$