

Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 12/01/2018

Esercizio 1

1) Scriviamo le equazioni del moto della sfera sul piano inclinato. Le forze agenti sono il peso $M\vec{g}$, la reazione normale \vec{T} e la forza di attrito statico \vec{F}_A . Scegliendo come polo per la seconda equazione cardinale il punto di contatto istantaneo fra la sfera ed il piano l'unica forza con momento non nullo è quella di gravità, per cui:

$$\begin{cases} M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A \\ \vec{\tau} = \vec{R} \wedge M\vec{g} = I_{contatto}\vec{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = Mg \sin \theta - F_A \\ T = Mg \cos \theta \\ RMg \sin \theta = \frac{7MR^2}{5} \alpha \end{cases} \quad (1)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione del centro di massa del sistema e $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare ed abbiamo calcolato il momento d'inerzia rispetto all'asse istantaneo di rotazione utilizzando il teorema di Huygens e Steiner. Per completare il sistema (1) è necessario introdurre l'ipotesi di moto di puro rotolamento, cioè la relazione fra \vec{a} e $\vec{\alpha}$:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} = \alpha R \hat{z} \quad (2)$$

dove \hat{z} è il versore dell'asse di rotazione (ortogonale a \vec{a} e $\vec{\alpha}$). Sostituendo la (2) in forma scalare nel sistema (1) e semplificando l'ultima equazione otteniamo:

$$\begin{cases} Ma = Mg \sin \theta - F_A \\ T = Mg \cos \theta \\ g \sin \theta = \frac{7}{5} a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5Mg \sin \theta}{7} = Mg \sin \theta - F_A \\ T = Mg \cos \theta \\ a = \frac{5g \sin \theta}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_A = \frac{2Mg \sin \theta}{7} \\ T = Mg \cos \theta \\ a = \frac{5g \sin \theta}{7} \end{cases} \quad (3)$$

Per verificare la validità dell'ipotesi di moto puramente rotatorio occorre controllare se la forza d'attrito così calcolata è minore della massima possibile in corrispondenza del coefficiente di attrito statico:

$$F_A = \frac{2Mg \sin \theta}{7} \leq T\mu_s = Mg \cos \theta \mu_s \Rightarrow \frac{2 \tan \theta}{7} \leq \mu_s \Rightarrow \tan \theta = 1.73 \leq \frac{7\mu_s}{2} = 1.855 \quad (4)$$

come richiesto.

2) Le espressioni algebriche di a e α sono state già ricavate nel punto precedente, per cui è sufficiente sostituire i valori numerici:

$$a = \frac{5g \sin \theta}{7} = 6.06 \text{ m/s}^2; \quad \alpha = \frac{a}{R} = 12.12 \text{ rad/s}^2 \quad (5)$$

Nel tratto orizzontale liscio la somma delle forze parallele al piano è nulla, per cui la sfera procede di moto puramente rotatorio con velocità costante del centro di massa e conseguentemente velocità angolare costante. Nel tratto orizzontale quindi:

$$a = 0; \quad \alpha = 0 \quad (6)$$

3) Come osservato in precedenza, la velocità del centro di massa e la velocità angolare della sfera si mantengono costanti nel tratto orizzontale, per cui i loro valori coincidono con quelli che le due grandezze assumono al termine del tratto in discesa. Per determinare questi ultimi si può utilizzare la cinematica (il

moto del centro di massa è uniformemente accelerato) oppure la conservazione dell'energia notando che il lavoro delle forze non conservative è nullo. Chiamando V_F e ω_F la velocità del centro di massa e la velocità angolare della sfera al termine del tratto in discesa si ha:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = 0 + MgL \sin \theta = E_F = K_F + U_F = \frac{MV_F^2}{2} + \frac{I\omega_F^2}{2} \quad (7)$$

dove $I = (2/5)MR^2$ è il momento d'inerzia della sfera rispetto al centro di massa. Sostituendo la relazione del moto di pura rotazione $V_F = \omega_F R$ nella (7) si ottiene:

$$MgL \sin \theta = \frac{MV_F^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{2MR^2 V_F^2}{5R^2} = \frac{7MV_F^2}{10} \Rightarrow V_F = \sqrt{\frac{10gL \sin \theta}{7}} = 19.1 \text{ m/s} \quad (8)$$

da cui infine:

$$\omega_F = \frac{V_F}{R} = 38.2 \text{ rad/s} \quad (9)$$

4) Quando lascia il trampolino la sfera compie un moto parabolico con velocità iniziale V_F orizzontale, per cui la sua legge oraria, avendo posto l'origine degli assi nel punto P , è espressa dal sistema:

$$\begin{cases} y = h - \frac{gt^2}{2} \\ x = V_F t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = h - \frac{gx^2}{2V_F^2} \\ t = x/V_F \end{cases} \quad (10)$$

Quando la sfera tocca terra $y = 0$, per cui:

$$\frac{gx^2}{2V_F^2} = h \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2hV_F^2}{g}} = 38.6 \text{ m} \quad (11)$$

Esercizio 2

1) Per determinare la relazione fra ρ e σ che annulla il campo \vec{E} all'esterno del sistema è sufficiente notare che per simmetria tale campo è diretto lungo l'asse \hat{x} , cioè ortogonalmente ai piani che delimitano le distribuzioni di carica. Pertanto se consideriamo un cilindro di Gauss con l'asse parallelo a \hat{x} , una base nella regione $x < 0$ ed una nella regione $x > 2d$, il flusso del campo \vec{E} attraverso questo cilindro è nullo, per cui deve esserlo anche la carica interna al cilindro stesso. Detta S l'area di base del cilindro, la carica interna ad esso corrisponde a quella contenuta nelle due regioni dello spazio in cui il cilindro interseca le distribuzioni, cioè una superficie di area S sulla lastra in $x = 0$ ed un cilindro di volume Sd nella distribuzione di carica negativa. Quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{S\sigma - Sd\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \rho d \quad (12)$$

2) Per calcolare il campo \vec{E} in tutto lo spazio si utilizza il principio di sovrapposizione. Chiamiamo rispettivamente \vec{E}_+ e \vec{E}_- i campi dovuti alla lastra caricata positivamente ed alla distribuzione di volume di carica negativa. Per simmetria entrambi i campi sono diretti lungo l'asse \hat{x} e possono dipendere solo dalla coordinata x . L'espressione di \vec{E}_+ è peraltro un risultato ben noto:

$$\vec{E}_+(x) = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} & x < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Per quanto riguarda $\vec{E}_-(x)$ conviene partire dalla regione $x > 2d$, in cui il campo totale a causa della (12) è zero. Dunque:

$$\vec{E}(x > 2d) = 0 = \vec{E}_+(x > 2d) + \vec{E}_-(x > 2d) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} + \vec{E}_-(x > 2d) \Rightarrow \vec{E}_-(x > 2d) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} \quad (14)$$

Consideriamo ora un cilindro di Gauss con l'asse parallelo a \hat{x} , una base nella regione $x > 2d$ e l'altra nella regione $d < x < 2d$, cioè all'interno della distribuzione di carica negativa. Il flusso di \vec{E}_- attraverso questo cilindro, detta S l'area delle sue basi, è:

$$\Phi(\vec{E}_-) = -S \left(E_-(d < x < 2d) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{-\rho S(2d-x)}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

Infatti il termine $-SE_-(d < x < 2d)$ è il flusso del campo \vec{E}_- attraverso la base posta nella regione $d < x < 2d$ ed ha il segno negativo perché la normale uscente sulla base in questa regione è rivolta nel verso delle x negative, mentre il termine $-\frac{S\sigma}{2\varepsilon_0}$ è il flusso del campo \vec{E}_- attraverso la base posta nella regione $x > 2d$. Semplificando i termini comuni e risolvendo per $E_-(d < x < 2d)$ si ottiene:

$$E_-(d < x < 2d) = \frac{\rho(2d-x)}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(2d - x - \frac{d}{2} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(\frac{3d}{2} - x \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{d} \right) \quad (16)$$

In conclusione:

$$\vec{E}(d < x < 2d) = \vec{E}_+(d < x < 2d) + \vec{E}_-(d < x < 2d) = \vec{E}_+(x > 0) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(\frac{3d}{2} - x \right) \hat{x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (2d - x) \hat{x} \quad (17)$$

avendo sostituito la relazione (12) fra σ e ρ . Passando ora alla regione $x < d$ possiamo osservare che per quanto riguarda la distribuzione di carica negativa questa regione è simmetrica della regione $x > 2d$, in quanto tale distribuzione è centrata in $x = 3d/2$. Il campo $\vec{E}_-(x < d)$ si ottiene quindi da $\vec{E}_-(x > 2d)$ semplicemente cambiando un segno, ovvero:

$$\vec{E}_-(x < d) = -\vec{E}_-(x > 2d) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} \quad (18)$$

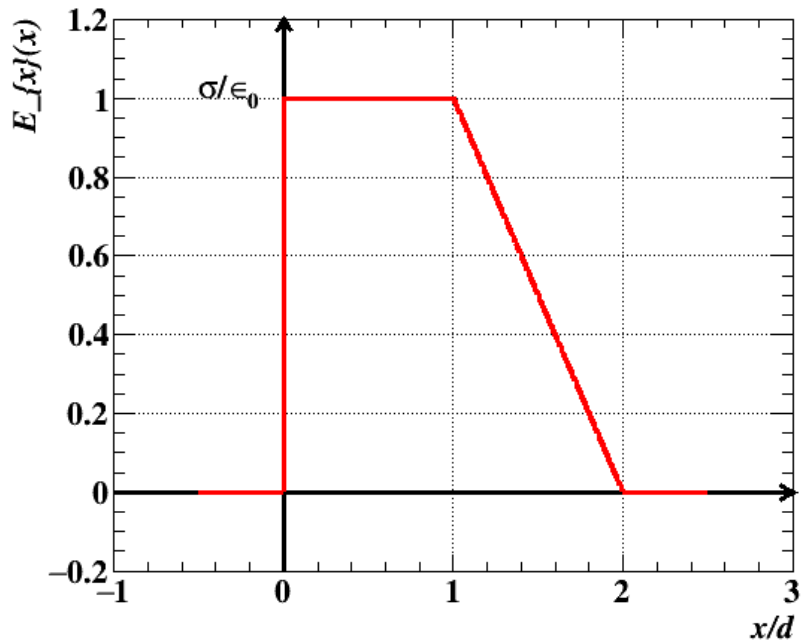
Nella regione $x < 0$ il campo (18) ed il campo $\vec{E}_+(x < 0)$ (espresso dalla seconda riga della (13)) si annullano a vicenda in base alla (12), che del resto è stata ricavata con questa assunzione; invece nella regione $0 < x < d$ il campo (18) si sovrappone al campo $\vec{E}_+(x > 0)$ (espresso dalla prima riga della (13)) ed i due campi sono eguali, per cui:

$$\vec{E}(0 < x < d) = \vec{E}_+(0 < x < d) + \vec{E}_-(0 < x < d) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{x} \quad (19)$$

Riepilogando:

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ e } x > 2d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} & 0 < x < d \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(2 - \frac{x}{d}\right) \hat{x} & d < x < 2d \end{cases} \quad (20)$$

Il grafico della (20) è mostrato nella Figura seguente in funzione della variabile x/d .



3) Avendo fissato il potenziale nullo in $x = 2d$ conviene utilizzare la relazione fra V e \vec{E} , utilizzando questo valore come riferimento. Pertanto:

$$V(x > 2d) - V(x = 2d) = V(x > 2d) = - \int_{2d}^x \vec{E}(x > 2d) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (21)$$

in quanto per ipotesi il campo elettrico è nullo nella regione $x > 2d$. Sempre utilizzando il fatto che il potenziale è zero in $x = 2d$ otteniamo:

$$V(x = 2d) - V(d \leq x \leq 2d) = -V(d \leq x \leq 2d) = - \int_x^{2d} \vec{E}(d \leq x \leq 2d) \cdot d\vec{l} \quad (22)$$

da cui:

$$\begin{aligned} V(d \leq x \leq 2d) &= \int_x^{2d} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(2 - \frac{x'}{d}\right) \hat{x} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[2x' - \frac{x'^2}{2d}\right]_x^{2d} = \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[4d - \frac{4d^2}{2d} - 2x + \frac{x^2}{2d}\right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[2(d - x) + \frac{x^2}{2d}\right] \end{aligned} \quad (23)$$

Dalla (23) si ricava in particolare:

$$V(x = d) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \quad (24)$$

La (24) fornisce il potenziale di riferimento per studiare la regione $0 < x < d$. Infatti:

$$V(x = d) - V(0 \leq x \leq d) = - \int_x^d \vec{E}(0 \leq x \leq d) \cdot d\vec{l} = - \int_x^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \cdot d\vec{l} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - x) \quad (25)$$

Pertanto:

$$V(0 \leq x \leq d) = V(x = d) + \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - x) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma d}{\epsilon_0} - \frac{\sigma x}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{3d}{2} - x \right) \quad (26)$$

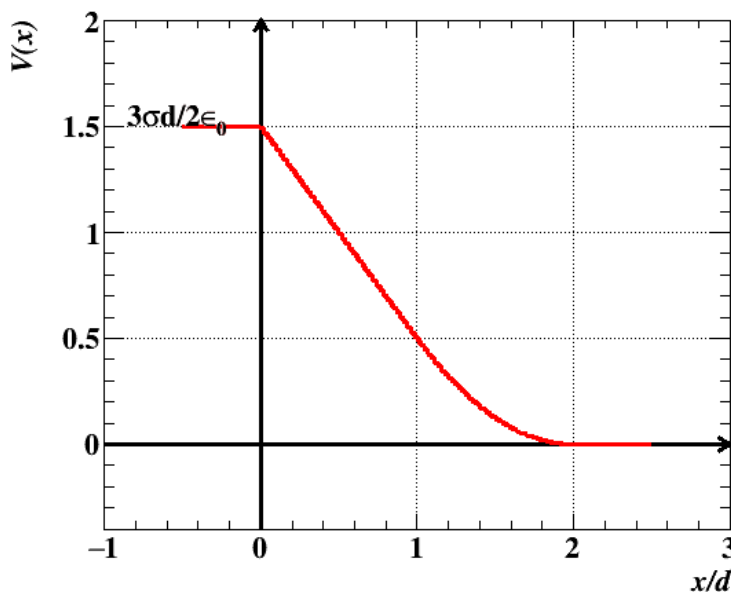
Dalla (26) segue immediatamente:

$$V(x = 0) = \frac{3\sigma d}{2\epsilon_0} \quad (27)$$

Infine, poiché il campo $\vec{E}(x \leq 0)$ è zero, il potenziale nella regione delle x negative rimane fisso al valore espresso dalla (27), cioè:

$$V(x \leq 0) = V(x = 0) = \frac{3\sigma d}{2\epsilon_0} \quad (28)$$

Il grafico della (28) è mostrato nella Figura seguente in funzione della variabile x/d .



4) Consideriamo un elemento di area dA sulla piastra. Poiché la piastra è uniformemente caricata, sull'elemento di superficie si trova una carica infinitesima $dq = \sigma dA$. Il campo elettrico è nullo nella regione $x < 0$ e vale σ/ϵ_0 nella regione $0 < x \leq d$, per cui il campo in corrispondenza della piastra si può considerare come la media dei due. La forza agente sull'elemento di carica dq è quindi:

$$d\vec{F} = \langle \vec{E} \rangle dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} \sigma dA \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{x} \quad (29)$$

Ricordiamo comunque che la pressione è uno scalare, per cui:

$$p = \left| \frac{d\vec{F}}{dA} \right| = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (30)$$