Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 13/09/2017

Esercizio 1

1) La quantità di moto del sistema NON SI CONSERVA a causa della presenza di forze esterne ed in particolare della gravità.
Il momento angolare del disco rispetto all'asse di rotazione NON SI CONSERVA a causa del momento esercitato sul disco dalla forza di tensione.
L'energia cinetica del sistema ovviamente NON SI CONSERVA (il sistema passa da uno stato di quiete ad uno di moto) per effetto del lavoro esercitato dalla forza di gravità
L'energia meccanica totale del sistema SI CONSERVA, perché l'unico lavoro non nullo è compiuto dalla forza di gravità che è conservativa.
2) Scriviamo in forma vettoriale le equazioni del moto della massa m e del disco, indicando separatamente con $\vec{T}_m$ la forza di tensione agente sulla massa sospesa e con $\vec{T}_d$ la forza di tensione agente sul disco (Chiaramente per il terzo principio di Newton: $\vec{T}_m = -\vec{T}_d$):

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_m \\ \vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{T}_d = -\vec{R} \wedge \vec{T}_m = I\vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2}\vec{\alpha} = mR^2\vec{\alpha} \\ \vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} \end{cases} \tag{1}$$

Nell'ultima riga del sistema (1) abbiamo aggiunto la relazione fra $\vec{a}$ ed $\vec{\alpha}$ dovuta al fatto che la corda non slitta sul disco e nella seconda abbiamo tenuto conto della relazione fornita nel testo $M = 2m$. Proseguendo il calcolo in maniera formale vettoriale possiamo sostituire la prima e la terza equazione del sistema nella seconda ottenendo:

$$-\vec{R} \wedge m(\vec{a} - \vec{g}) = -m\vec{R} \wedge \left((\vec{\alpha} \wedge \vec{R}) - \vec{g} \right) = -mR^2\vec{\alpha} + m\left(\vec{R} \wedge \vec{g}\right) = mR^2\vec{\alpha} \implies \vec{\alpha} = \frac{(\hat{R} \wedge \vec{g})}{2R} \tag{2}$$

Scegliendo un sistema di riferimento in cui il vettore $\vec{R}$ è diretto lungo l'asse $\hat{x}$ e la forza di gravità lungo l'asse $\hat{y}$ (verso il basso), il prodotto vettoriale $(\hat{R} \wedge \vec{g})$, che definisce la direzione di rotazione del disco, è diretto lungo l'asse $\hat{z}$, per cui:

$$\vec{\alpha} = \frac{g}{2R}\hat{z} \qquad \implies \vec{a} = \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{R}\right) = \frac{gR}{2R}(\hat{z} \wedge \hat{x}) = \frac{g}{2}\hat{y} = \frac{\vec{g}}{2} \tag{3}$$

La forza di tensione sulla massa m si ottiene sostituendo questi risultati nella prima riga del sistema (1):

$$\vec{T}_m = m(\vec{a} - \vec{g}) = m\left(\frac{\vec{g}}{2} - \vec{g}\right) = -\frac{m\vec{g}}{2} \qquad \implies \vec{T}_d = -\vec{T}_m = +\frac{m\vec{g}}{2} \tag{4}$$

Per verificare che il lavoro TOTALE della forza di tensione è nullo, consideriamo la potenza sviluppata dalla forza di tensione agente sul disco e da quella agente sulla massa m separatamente e le sommiamo:

$$P_{\vec{T}} = P_{\vec{T}_d} + P_{\vec{T}_m} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} + \vec{T}_m \cdot \vec{V} = -\left(\vec{R} \wedge \vec{T}_m\right) \cdot \vec{\omega} + \vec{T}_m \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}\right) \tag{5}$$

Il prodotto misto vettoriale-scalare gode della proprietà di rotazione, in virtù della quale:

$$\vec{T}_m \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}\right) = \vec{R} \cdot \left(\vec{T}_m \wedge \vec{\omega}\right) = \vec{\omega} \cdot \left(\vec{R} \wedge \vec{T}_m\right) = \left(\vec{R} \wedge \vec{T}_m\right) \cdot \vec{\omega} \tag{6}$$

La somma (6) risulta quindi identicamente nulla ad ogni istante, per cui il lavoro complessivo della forza di tensione è zero.
In maniera meno formale, ma più intuitiva è sufficiente osservare che le due tensioni $\vec{T}_d$ e $\vec{T}_m$ sono eguali ed opposte, mentre gli spostamenti della fune a contatto della carrucola e della massa m sono eguali, per cui il lavoro totale è nullo.
3) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia fra l'istante $t = 0$ ed un istante generico $t > 0$ in cui la massa m si trova a distanza h dal centro del disco:

$$E(t = 0) = K(t = 0) + U(t = 0) = 0 - mgR = K(t > 0) + U(t > 0) = \frac{I}{2}\omega^2(h) + \frac{m}{2}V^2(h) - mgh \quad (7)$$

dove si è posto lo zero dell'energia potenziale in corrispondenza della linea orizzontale passante per il centro del disco (come suggerito nel testo), I è il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa e $V(h)$ è la velocità della massa m a quota h. Poiché la corda non slitta sul disco $V(h)$ e $\omega(h)$ sono legati dalla relazione:

$$V(h) = R\omega(h) \quad (8)$$

Inoltre il momento d'inerzia del disco per rotazione intorno al suo centro di massa è noto:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (9)$$

per cui, tenendo conto della (8) e della (9) e ricordando che $M = 2m$ si ha:

$$-mgR = -mgh + \frac{m}{2}\omega^2(h)R^2 + \frac{1}{2}\frac{2m}{2}\omega^2(h)R^2 = -mgh + m\omega^2(h)R^2 \quad (10)$$

da cui infine:

$$\omega(h) = \frac{\sqrt{g(h-R)}}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{h}{R} - 1\right)} \quad (11)$$

4) Scriviamo nuovamente il sistema (1) tenendo conto della presenza del momento frenante esercitato dall'operatore:

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_m \\ \vec{\tau} = -\vec{R} \wedge \vec{T}_m + \vec{\tau}_{op} = -\vec{R} \wedge \vec{T}_m + \vec{\tau}_0\left(\frac{t}{t^*} - 1\right) = I\vec{\alpha} = mR^2\vec{\alpha} \\ \vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} \end{cases} \quad (12)$$

in cui si sottintende che il sistema (12) vale per $t > t^*$ (si noti che ora $\vec{a}$, $\vec{\alpha}$ e $\vec{T}_m$ sono funzioni del tempo !). Con le medesime sostituzioni effettuate nel punto (2) dell'esercizio otteniamo:

$$-mR^2\vec{\alpha} + m\left(\vec{R} \wedge \vec{g}\right) + \vec{\tau}_0\left(\frac{t}{t^*} - 1\right) = mR^2\vec{\alpha} \quad (13)$$

da cui:

$$\vec{\alpha} = \frac{(\hat{R} \wedge \vec{g})}{2R} + \frac{\vec{\tau}_0}{2mR^2}\left(\frac{t}{t^*} - 1\right) \quad (14)$$

Ricordando che:

$$\tau_0 = \frac{MRg}{4} = \frac{mRg}{2} \tag{15}$$

e che il momento frenante è di verso opposto a quello prodotto dalla forza di tensione si ha:

$$\vec{\alpha} = \frac{g}{2R}\hat{z} - \frac{g}{4R}\hat{z}\left(\frac{t}{t^*} - 1\right) = \frac{g}{4R}\hat{z}\left(3 - \frac{t}{t^*}\right) \tag{16}$$

L'accelerazione lineare $\vec{a}$ è quindi:

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}}{4}\left(3 - \frac{t}{t^*}\right) \tag{17}$$

per cui è diretta verso l'alto per $t > 3t^*$. Per determinare la velocità della massa m in funzione del tempo per $t > t^*$ occorre ricordare che fino all'istante t^* la massa m è uniformemente accelerata, mentre per $t > t^*$ è soggetta all'accelerazione (17). Pertanto possiamo scrivere:

$$\vec{V}(t > t^*) = \vec{V}(t^*) + \int_{t^*}^{t} \vec{a}(t' > t^*)dt' = \frac{\vec{g}}{2}t^* + \frac{\vec{g}}{4}\int_{t^*}^{t}\left(3 - \frac{t'}{t^*}\right)dt' = \frac{\vec{g}}{4}t^*\left(2 + 3\frac{(t-t^*)}{t^*} - \frac{(t^2-t^{*2})}{2t^{*2}}\right) \tag{18}$$

La parentesi tonda vale:

$$\left(2 + 3\frac{(t-t^*)}{t^*} - \frac{(t^2-t^{*2})}{2t^{*2}}\right) = 2 + 3\frac{t}{t^*} - 3 - \frac{t^2}{2t^{*2}} + \frac{1}{2} = -\frac{t^2}{2t^{*2}} + 3\frac{t}{t^*} - \frac{1}{2} \tag{19}$$

Indicando con x il rapporto t/t^*, moltiplicando per 2 e cambiando opportunamente i segni otteniamo un'equazione di secondo grado che definisce l'istante in cui la velocità diventa zero:

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{5} \tag{20}$$

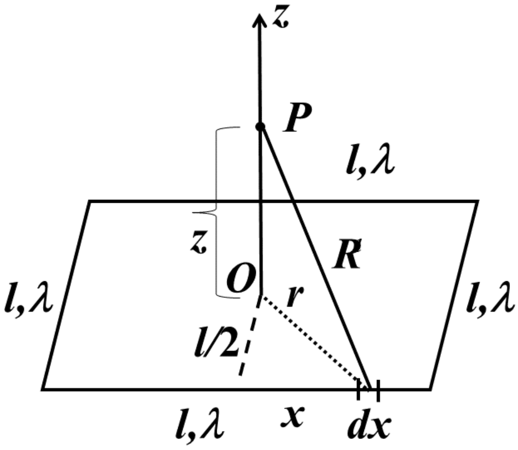
Poiché il calcolo che abbiamo svolto è valido solo per $t > t^*$ concludiamo che la soluzione con il segno "−" è da scartare; l'istante t^{**} in cui il disco si ferma è quindi:

$$t^{**} = \left(3 + \sqrt{5}\right)t^* \tag{21}$$

Il testo afferma solo che l'operatore applica il momento frenante fino ad arrestare il disco. Non essendo specificata la sua azione negli istanti successivi non si può determinare il comportamento del sistema ed in particolare il valore della velocità della massa m per $t > t^{**}$.

Esercizio 2

1) Utilizziamo per i punti 1) e 2) la Figura a fianco, in cui per il punto 1) l'altezza z risulta chiaramente nulla.



Il potenziale elettrostatico nel punto P si calcola notando innanzitutto che per simmetria ciascuna della quattro sbarrette dà un contributo identico. Inoltre, sempre per simmetria, la distanza R del punto P dall'elemento dx della sbarretta non varia scambiando x con $-x$, misurati entrambi dal centro della sbarretta stessa. Nel caso $z = 0$ (centro del quadrato nel piano (x, y)) possiamo quindi scrivere, per l'elemento dx:

$$dV(z = 0) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} \tag{22}$$

Il potenziale nell'origine, tenendo conto delle proprietà di simmetria, è:

$$V(z = 0) = 4 \times 2 \times \int_0^{\frac{l}{2}} dV(x) = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\log\left|x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}\right|\right]_0^{\frac{l}{2}} =$$

$$\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}{\frac{l}{2}}\right) = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\log\left(1 + \sqrt{2}\right) \tag{23}$$

dove Q è la carica totale sulle quattro sbarrette. A titolo di confronto possiamo ricordare che il potenziale di un anello carico di raggio a con una carica totale Q nel suo centro è: $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Se l'anello è inscritto nel quadrato $a = l/2$, per cui i due risultati differiscono solo per il fattore $\log\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0.881$, che è leggermente minore di 1, come prevedibile visto che le sbarrette rettangolari sono un po' più distanti dell'anello dal centro comune.

Per quanto riguarda il campo elettrico è sufficiente una semplice considerazione di simmetria per concludere che il campo al centro è nullo: infatti i campi prodotti dalle quattro sbarrette sono a due a due eguali in modulo e direzione ed opposti in verso.

2) Per $z > 0$ possiamo ripetere il calcolo del potenziale in maniera analoga, pur di rimpiazzare r con R e conseguentemente $(l/2)^2$ con $(l/2)^2 + z^2$. Pertanto, in analogia alla (22):

$$dV(z) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 + z^2}} \tag{24}$$

e conseguentemente:

$$V(z) = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\log\left|x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + z^2}\right|\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 + z^2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + z^2}}\right) \tag{25}$$

Mettiamo in evidenza $(l/2)$ ed introduciamo la variabile adimensionale $t = (2z/l)$; in questo modo la (25) prende la forma:

$$V(z) = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{1+\sqrt{2+ t^2}}{\sqrt{1+ t^2}}\right) = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\log\left(1 + \sqrt{2+ t^2}\right) - \frac{1}{2}\log(1+ t^2)\right] \tag{26}$$

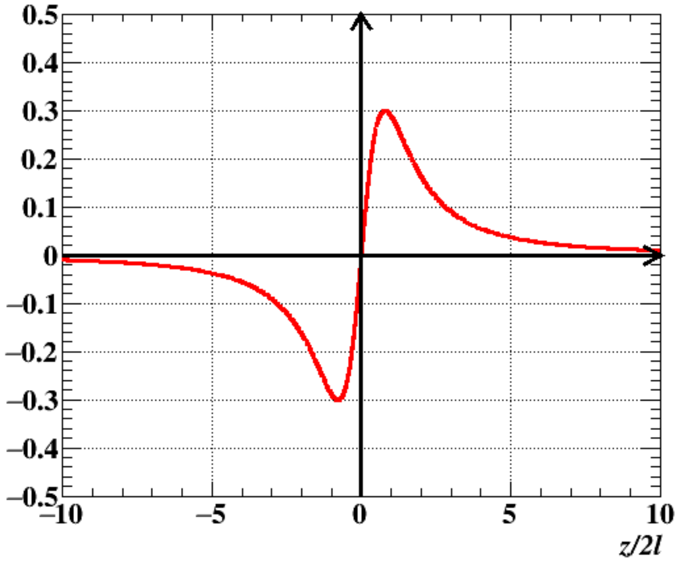
Per $t = 0$ si ottiene ovviamente la formula (23); inoltre il potenziale è sempre positivo (come prevedibile, visto che tutte le sbarrette sono caricate positivamente) e tende a zero per $t \to \infty$, cioè a grande distanza dal sistema.

A differenza del caso precedente, il campo elettrico per un valore arbitrario di z non è nullo, in quanto le considerazioni di simmetria che valevano per $z = 0$ ora si applicano solo alle componenti dei campi dovuti alle singole sbarrette ortogonali a z, mentre le componenti parallele si sommano; il campo risultante sarà quindi diretto lungo z, cioè della forma $\vec{E} = \hat{z}E_z(z)$. È chiaramente possibile ricavare il campo calcolando le singole componenti e sommandole, ma è più rapido e più conveniente sfruttare la relazione fra il potenziale ed il campo, ovvero applicare la formula:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{2}{l}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\log\left(1+\sqrt{2+t^2}\right) - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]\right\} =$$

$$-\frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{2t}{2\sqrt{2+t^2}}\frac{1}{\left(1+\sqrt{2+t^2}\right)} - \frac{2t}{2(1+t^2)}\right) = +\frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{\sqrt{2+t^2}}\frac{1}{\left(1+\sqrt{2+t^2}\right)}\right) = \frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{\sqrt{2+t^2}+2+t^2}\right) \quad (27)$$

3) Esaminiamo la (27): si nota subito che il campo si annulla per $t = 0$, cioè $z = 0$, esattamente come nel punto 1); inoltre entrambi i denominatori si comportano come t^2 per $t \to \infty$, per cui entrambe le frazioni si comportano come $1/t$ ed il campo elettrico tende a zero (in realtà la convergenza è più rapida, ma questo aspetto per ora non è fondamentale). Il segno dell'espressione (27) è sempre univoco: positivo per $t > 0$, negativo per $t < 0$, in quanto il primo denominatore è sempre più piccolo del secondo; inoltre l'espressione in parentesi tonda è una funzione dispari di t. Nella regione $t > 0$ la funzione presenta quindi un massimo e nella regione $t < 0$ un minimo, in posizione simmetrica rispetto all'origine. In conclusione il grafico qualitativo del campo elettrico E_z è il seguente:



La presenza di un massimo nella regione $z > 0$ si giustifica notando che le componenti parallele a z aumentano con z e sono nulle nell'origine. Al crescere delle componenti verticali dei campi delle quattro sbarrette si contrappone però l'aumento della distanza del punto P dalla distribuzione di carica: pertanto inizialmente prevale l'effetto di incremento delle componenti parallele ed il campo aumenta, ma successivamente prevale l'effetto di aumento della distanza ed il campo decresce fino ad annullarsi a distanza infinita. La presenza del minimo nella regione $z < 0$ si giustifica in maniera analoga, ricordando che E_z è una funzione dispari di z.

L'annullamento del campo in $t = 0$ è dovuto, come già notato, alla simmetria del problema. Invece la convergenza a zero per $t \to \infty$ deriva dalla dipendenza della legge di Coulomb da $1/r^2$; se infatti calcoliamo l'andamento della (27) per $t \to \infty$ otteniamo:

$$\frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{\sqrt{2+t^2}+2+t^2}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{t}{t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+t^2\left(1+\frac{2}{t^2}\right)}\right) \to \frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{4\lambda}{\pi\varepsilon_0 l t^2} \quad (28)$$

Sostituendo la definizione di t e ricordando che la carica totale Q è pari a $4\lambda l$ si ottiene:

$$E_z \xrightarrow[z\to\infty]{} \frac{4\lambda l^2}{\pi\varepsilon_0 l 4z^2} = \frac{4\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \quad (29)$$

A distanze grandi rispetto alle dimensioni del quadrato il sistema delle quattro sbarrette si comporta dunque, come prevedibile, come una carica puntiforme posta nel centro del quadrato stesso.

4) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia, dato che nel sistema sono presenti solo forze conservative:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}mV_0^2 + eV(z = 10l) = K_f + U_f = 0 + eV(z = 0) \quad (30)$$

in quanto la velocità minima è quella che consente al protone di arrivare nell'origine con velocità nulla. Dalla (30) si ricava immediatamente:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}\big(V(z=0) - V(z=10l)\big)} = \sqrt{\frac{2e}{m}\big(V(t=0) - V(t=20)\big)} \tag{31}$$

Poiché i due termini del potenziale differiscono solo per il fattore numerico, calcoliamo preliminarmente la differenza fra le parti adimensionali dell'espressione (26) per $t = 0$ e $t = 20$:

$$\log\big(1+\sqrt{2}\big) - \left[\log\left(1+\sqrt{2+(20)^2}\right) - \frac{1}{2}\log(1+(20)^2)\right] = 0.881 - (3.047 - 2.997) = 0.831 \tag{32}$$

Sostituendo nella (31) ed includendo la parte dimensionale della (26) otteniamo:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}\times\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\times 0.831}\ \mathrm{m/s} = \sqrt{\frac{2\times 1.6\times 10^{-19}\times 2\times 10^{-7}\times 0.831}{1.67\times 10^{-27}\times\pi\times 8.85\times 10^{-12}}}\ \mathrm{m/s} = 1.07\times 10^{6}\ \mathrm{m/s} \tag{33}$$