

Esercizio 1

1) Durante il moto la quantità di moto totale non si conserva, perché il sistema è soggetto alla forza esterna esercitata dall'operatore. Quest'ultima forza inoltre è non conservativa, per cui l'energia totale non si conserva. Si conserva invece il momento angolare del sistema rispetto al centro O , in quanto la forza dell'operatore, agendo lungo le funi, ha momento nullo rispetto ad O .

2) Applicando la conservazione del momento angolare, dimostrata nel punto 1), possiamo scrivere:

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0 = \vec{L}_f = I_f \vec{\omega}_f \quad (1)$$

dove I_0 e I_f sono i momenti d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione verticale passante per O negli istanti $t = 0$ e $t = t_f$. La differenza fra i due momenti d'inerzia nasce chiaramente dalla diversa distanza dei due blocchi dal centro: a $t = 0$ tale distanza è l , a $t = t_f$ invece è nulla. Per quanto riguarda le lamine, il loro contributo al momento d'inerzia è fisso e vale, essendo vincolate a ruotare intorno ad un asse baricentrale:

$$I_{due\ lamine} = 2 \times I_{lamina} = 2 \times \frac{M(2l)^2}{12} = 2 \times \frac{4Ml^2}{12} = 2 \times \frac{4ml^2}{3} = \frac{8ml^2}{3} \quad (2)$$

Il contributo dei due blocchi al momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O è diverso da zero solo all'istante $t = t_f$ e vale:

$$I_{due\ blocchi} = 2 \times I_{blocco} = 2 \times ml^2 = 2ml^2 \quad (3)$$

I due momenti d'inerzia I_0 e I_f sono quindi:

$$I_0 = I_{due\ lamine} + I_{due\ blocchi} = \frac{14ml^2}{3} \quad (4)$$

$$I_f = I_{due\ lamine} = \frac{8ml^2}{3} \quad (5)$$

Sostituendo i valori di I_0 e I_f nella (1) e risolvendo per ω_f abbiamo infine:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 \frac{I_0}{I_f} = \frac{7}{4} \vec{\omega}_0 \quad (6)$$

3) Le energie cinetiche del sistema agli istanti $t = 0$ e $t = t_f$ sono rispettivamente:

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{14ml^2}{3} \omega_0^2 = \frac{7ml^2}{3} \omega_0^2; \quad K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} \frac{8ml^2}{3} \left(\frac{7}{4}\right)^2 \omega_0^2 = \frac{49ml^2}{12} \omega_0^2 \quad (7)$$

Si ha quindi:

$$K_f - K_0 = ml^2 \omega_0^2 \left(\frac{49}{12} - \frac{7}{3}\right) = ml^2 \omega_0^2 \left(\frac{49-28}{12}\right) = \frac{21}{12} ml^2 \omega_0^2 > 0 \quad (8)$$

La differenza fra le energie cinetiche finale ed iniziale è positiva perché il lavoro compiuto dall'operatore nel trascinare i blocchi verso il centro O è positivo (forza e spostamento sono paralleli ed equiversi).

4) Consideriamo, come nella Figura del testo (vista laterale), i due blocchi ad una distanza generica r dal centro. Poiché il momento angolare totale si conserva durante il moto, possiamo generalizzare la (1) ad un istante arbitrario del moto corrispondente alla distanza r scrivendo:

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}_0 = \vec{L}(r) = I(r) \vec{\omega}(r) \quad (9)$$

Il momento d'inerzia a distanza r è, generalizzando la (3) e la (4) con r al posto di l solo per i blocchi:

$$I(r) = I_{due\ lamine} + I_{due\ blocchi}(r) = \frac{8ml^2}{3} + 2mr^2 = \frac{8ml^2 + 6mr^2}{3} \quad (10)$$

da cui:

$$\omega(r) = \omega_0 \frac{I_0}{I(r)} = \omega_0 \frac{14ml^2}{3} \frac{3}{8ml^2 + 6mr^2} = \omega_0 \left(\frac{14l^2}{8l^2 + 6r^2} \right) = \omega_0 \left(\frac{7l^2}{4l^2 + 3r^2} \right) \quad (11)$$

La forza centrifuga è quindi, applicando la definizione:

$$F_c(r) = m\omega^2(r)r = m\omega_0^2 \left(\frac{7l^2}{4l^2 + 3r^2} \right)^2 r \quad (12)$$

Per determinare r_m calcoliamo la derivata di $F_c(r)$ rispetto a r e poniamo che sia nulla in $r = r_m$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF_c}{dr} \right)_{r=r_m} &= m\omega_0^2 \left[\left(\frac{7l^2}{4l^2 + 3r^2} \right)^2 + r \times 6r \times (-1) \frac{7l^2}{(4l^2 + 3r^2)^2} \times 2 \left(\frac{7l^2}{4l^2 + 3r^2} \right) \right]_{r=r_m} = \\ m\omega_0^2 \left(\frac{7l^2}{4l^2 + 3r^2} \right)^2 \left[1 - \frac{12r^2}{4l^2 + 3r^2} \right]_{r=r_m} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Risolvendo la (13) si ottiene quindi, annullando la parentesi quadra:

$$\left[1 - \frac{12r^2}{4l^2 + 3r^2} \right]_{r=r_m} = 0 \quad \Rightarrow 12r_m^2 = 4l^2 + 3r_m^2 \quad \Rightarrow 9r_m^2 = 4l^2 \quad (14)$$

da cui infine:

$$r_m = \frac{2}{3}l \quad (15)$$

Esercizio 2

1) Per simmetria il campo elettrico è diretto radialmente, cioè è della forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}E(r) \quad (16)$$

La funzione $E(r)$ si ricava applicando la legge di Gauss ed utilizzando come superficie gaussiana un cilindro di raggio r arbitrario ed altezza L , coassiale ai cilindri metallici che formano il condensatore. La carica interna a questa superficie gaussiana è nulla se $r < a$ (interno di un cilindro conduttore) e se $r > b$ (le superfici metalliche hanno cariche eguali ed opposte) per cui:

$$\int_{Sup.Gauss} \vec{E} \cdot \hat{n} dSup = 2\pi r L E(r) = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda L & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (17)$$

Pertanto:

$$E(r) = \frac{Q_{int}(r)}{2\pi r L \epsilon_0 \epsilon_r} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad (18)$$

2) La densità di corrente si ricava immediatamente applicando la prima legge di Ohm in forma locale:

$$\vec{J}(r) = \sigma_c \vec{E}(r) = \frac{\lambda \sigma_c}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} \hat{r} \quad (19)$$

(Ovviamente ci limitiamo alla regione $a < r < b$, l'unica in cui il campo elettrico non è nullo). La densità di corrente (19) è distribuita uniformemente su una superficie cilindrica coassiale ai cilindri fisici, di raggio r ed altezza L , per cui:

$$I(r) = \int_{S_{Cil.(r,L)}} \vec{J}(r) \cdot \hat{n} dS_{Cil.(r,L)} = \int_{S_{Cil.(r,L)}} \frac{\lambda \sigma_c}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} \hat{r} \cdot \hat{r} dS_{Lat.(r,L)} = \frac{\lambda \sigma_c}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} \times 2\pi r L = \frac{\lambda \sigma_c L}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (20)$$

La dipendenza della corrente totale da r viene cancellata dall'integrazione sulla superficie cilindrica ed è imposta dalla legge di conservazione della carica elettrica.

3) Seguendo il suggerimento del testo, consideriamo una buccia cilindrica di raggio r , spessore dr e lunghezza L . Il contributo infinitesimo alla resistenza dato dalla buccia è, utilizzando la seconda legge di Ohm:

$$dR = \frac{dr}{\sigma_c S_{buccia}} = \frac{dr}{\sigma_c 2\pi r L} \quad \Rightarrow \quad R = \int_a^b \frac{dr}{\sigma_c 2\pi r L} = \frac{\ln(b/a)}{\sigma_c 2\pi L} \quad (21)$$

La differenza di potenziale fra le armature si ricava integrando il campo elettrico dato dalla (18):

$$V = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (22)$$

Il rapporto V/I vale quindi:

$$\frac{V}{I} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\lambda \sigma_c L} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sigma_c L} \quad (23)$$

in accordo con la (21).

4) L'energia iniziale del sistema (corrispondente al condensatore carico) si determina integrando la densità di energia sul volume fra le armature del condensatore, ovvero:

$$U_{in} = \int \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} E^2 dV = \int_a^b \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r}\right)^2 2\pi r L dr = \frac{\lambda^2 L}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (24)$$

La corrente attraverso la resistenza parassita si ricava scrivendo l'equazione del circuito equivalente, che è quella di un condensatore carico che si scarica attraverso una resistenza:

$$\frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (25)$$

dove $Q(t)$ è la carica sull'armatura positiva, R è data dalla (21) e C è la capacità di un condensatore cilindrico:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (26)$$

La costante tempo del circuito vale perciò:

$$RC = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \times \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\sigma_c 2\pi L} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\sigma_c} \quad (27)$$

La soluzione della (25), tenendo conto della condizione iniziale, è:

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \lambda L \exp\left(-\frac{\sigma_c t}{\epsilon_0\epsilon_r}\right) \quad (28)$$

La corrente si può ottenere o per derivazione diretta (col segno negativo) della (28) o utilizzando direttamente la (20) in cui la densità di carica lineare λ dipende dal tempo. In entrambi i modi:

$$I(t) = \frac{Q(0)}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0\epsilon_r} Q(t) \quad (29)$$

L'energia totale dissipata sulla resistenza parassita è quindi:

$$E_{diss} = \int_0^{+\infty} RI^2(t) dt = R \left(\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\epsilon_r}\right)^2 \int_0^{+\infty} \lambda^2 L^2 \exp\left(-\frac{2\sigma_c t}{\epsilon_0\epsilon_r}\right) dt = \frac{\ln(b/a)}{\sigma_c 2\pi L} \left(\frac{\sigma_c}{\epsilon_0\epsilon_r}\right)^2 \lambda^2 L^2 \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{2\sigma_c} = \frac{\ln(b/a)\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \quad (30)$$

in accordo con la (24).