

Esercizio 1

1) Poiché la sbarra può ruotare intorno al perno A , rispetto a cui sono non nulli i momenti della forza peso $m\vec{g}$ e della forza elastica \vec{F}_{el} , è sufficiente imporre che il momento risultante rispetto ad A sia zero. Il vantaggio di utilizzare l'equazione del momento rispetto ad A al posto dell'equazione del moto del centro di massa è che al moto del centro di massa contribuisce anche la reazione del perno A , che è di non banale determinazione. Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi, per cui se indichiamo con α uno dei due angoli alla base BP otteniamo:

$$2\alpha + \theta_0 = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi - \theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right); \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (1)$$

La forza elastica \vec{F}_{el} è diretta lungo il vettore \overrightarrow{BP} , per cui le sue componenti cartesiane sono:

$$\vec{F}_{el} = (+F_{el} \cos \alpha, +F_{el} \sin \alpha) = \left(+F_{el} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right), +F_{el} \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right) \quad (2)$$

L'allungamento della molla L si ricava tramite il teorema dei seni:

$$\frac{L}{\sin \theta_0} = \frac{L}{2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l}{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad L = 2l \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (3)$$

Si ottiene quindi per i momenti rispetto al perno A :

$$\vec{\tau}_{M\vec{g}} = -\frac{Mgl}{2} \cos \theta_0 \hat{z} = -\vec{\tau}_{\vec{F}_{el}} = -\hat{z} k L l \sin \alpha = -\hat{z} 2kl^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = -\hat{z} kl^2 \sin \theta_0 \quad (4)$$

da cui:

$$\tan \theta_0 = \frac{Mgl}{2kl^2} = \frac{2 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2}{2 \times 9.81 \text{ N/m} \times 1 \text{ m}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

2) a) La quantità di moto totale non si conserva, perché il sistema è soggetto ad una forza impulsiva, la reazione della cerniera A (vedi punto 4)).

b) Il momento angolare totale rispetto alla cerniera A si conserva, perché le forze che hanno braccio non nullo rispetto all'asse passante per la cerniera sono la forza peso e la forza elastica della molla, entrambe non impulsive, mentre la reazione della cerniera è impulsiva.

c) L'energia meccanica non si conserva a causa delle forze anelastiche che si sviluppano durante l'urto.

3) In base al risultato del punto 2) utilizziamo la conservazione del momento angolare totale rispetto alla cerniera A . Il momento angolare prima dell'urto è dovuto solo alla massa m e vale:

$$\vec{L}_{in} = \vec{l} \wedge m\vec{v}_0 = -mlv_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \hat{z} = -mlv_0 \cos \theta_0 \hat{z} \quad (6)$$

in cui il segno meno indica che la rotazione corrispondente a questo momento angolare è oraria.

Il momento angolare dopo l'urto si può scrivere utilizzando la velocità angolare del sistema (sbarra + massa m), in cui la massa m si trova a distanza l dalla cerniera; pertanto:

$$\vec{L}_{fin} = \frac{Ml^2}{3} \vec{\omega} + ml^2 \vec{\omega} = \left(\frac{3m+M}{3}\right) l^2 \vec{\omega} \quad (7)$$

Eguagliando infine la (6) e la (7) si ha:

$$\left(\frac{3m+M}{3}\right)l^2\vec{\omega} = -mlv_0 \cos \theta_0 \hat{z} \Rightarrow \vec{\omega} = -\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l} \cos \theta_0 \hat{z} = -\left(\frac{3m}{6m}\right)\frac{v_0 \sqrt{2}}{l} \hat{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \text{ rad/s} \quad (8)$$

4) La reazione impulsiva della cerniera si calcola utilizzando la variazione della quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto. Prima dell'urto è in moto solo la massa m , per cui la quantità di moto iniziale è:

$$\vec{p}_{in} = m\vec{v}_0 = -mv_0\hat{y} \quad (9)$$

La quantità di moto finale corrisponde alla somma vettoriale delle quantità di moto della sbarra e della massa m conficcata nella sbarra dopo l'urto. Sia la sbarra che la massa m compiono un moto di rotazione intorno alla cerniera A , per cui la quantità di moto dopo l'urto è:

$$\vec{p}_{fin} = M\vec{\omega}\Lambda\left(\frac{\vec{l}}{2}\right) + m\vec{\omega}\Lambda\vec{l} = \frac{5}{2}m(\vec{\omega}\Lambda\vec{l}) = \frac{5}{2}m(\vec{\omega}\Lambda\vec{l}) = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l} \cos \theta_0 (\hat{z}\Lambda\vec{l}) \quad (10)$$

Il prodotto vettoriale $(\hat{z}\Lambda\vec{l})$ si calcola osservando che, in base alla figura del testo:

$$(\hat{z}\Lambda\vec{l}) = \hat{z}\Lambda l(\hat{x}\cos\theta_0 - \hat{y}\sin\theta_0) = l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0) \quad (11)$$

Pertanto:

$$\vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l} \cos \theta_0 l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0) = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)v_0 \cos \theta_0 (\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0) \quad (12)$$

In conclusione, ricordando che $\theta_0 = \pi/4$ e che $M = 3m$:

$$\vec{I} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in} = -\frac{5m}{2}\frac{1}{2}v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y}) + mv_0\hat{y} = mv_0\left(-\frac{5}{8}\hat{x} + \left(-\frac{5}{8} + 1\right)\hat{y}\right) = -\frac{mv_0}{8}(5\hat{x} + 3\hat{y}) \quad (13)$$

Sostituendo i valori numerici: $m = M/3 = 2/3$ kg e $v_0 = 2$ m/s si ha:

$$\vec{I} = -\left(\frac{5}{6}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right) \text{ N} \times \text{s} \quad (14)$$

Esercizio 2

1) La corrente i_1 è entrante nel nodo, mentre i_2 e i_3 sono uscenti dal nodo. Per rispettare il principio ai nodi (che corrisponde alla conservazione della carica elettrica, visto che la carica non si accumula nei nodi) la somma delle correnti entranti deve essere eguale a quella delle correnti uscenti, per cui la combinazione giusta è la b): $(i_1, i_2, i_3) = (12\text{A}, 8\text{A}, 4\text{A})$.

2) Utilizzando l'espressione fornita nel testo possiamo ricavare il modulo del campo di induzione magnetica prodotto dai tre fili sommandone in quadratura le tre componenti cartesiane:

$$|\vec{B}(P)| = \sqrt{9 + 9 + 3.41^2} \mu\text{T} = 5.44 \mu\text{T} \quad (15)$$

L'energia del dipolo magnetico nel campo è quindi:

$$U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta = -60 \times 10^{-9} \times 5.45 \times 10^{-6} \frac{1}{2} \text{J} = -0.164 \text{ pJ} \quad (16)$$

3) Quando il dipolo viene rovesciato il coseno dell'angolo cambia segno, per cui l'energia del dipolo dopo il ribaltamento è:

$$U_f = +\mu B \cos \theta = -U_m = +0.164 \text{ pJ} \quad (17)$$

Il lavoro necessario per ribaltare il dipolo è dunque:

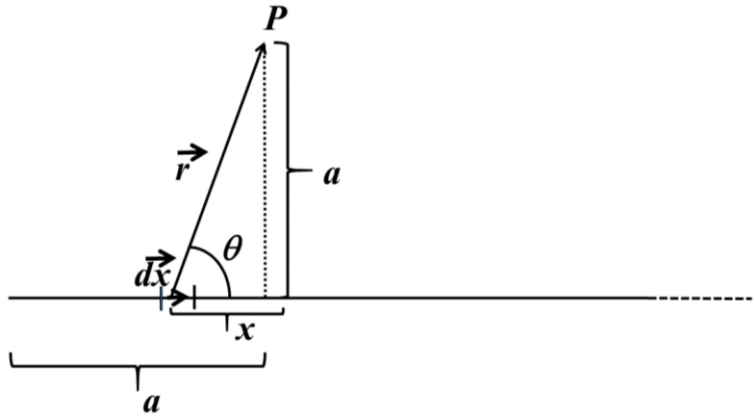
$$\mathcal{L} = U_f - U_m = 2U_f = +0.33 \text{ pJ} \quad (18)$$

Questo lavoro è positivo perché, essendo l'angolo iniziale minore di 90° e quello finale maggiore di 90° , la posizione finale è meno stabile di quella iniziale ed è quindi necessario un lavoro positivo per vincere il momento torcente di richiamo esercitato dal campo \vec{B} .

4) Il filo con la corrente i_1 è la metà superiore di un filo infinito tagliato in due dal piano $z = 0$: pertanto, visto che il punto P giace nel piano (x, y) (cioè $z = 0$), il campo di induzione magnetica \vec{B}_1 in P è la metà di quello che sarebbe prodotto in P da un filo indefinito allineato con l'asse z fra $-\infty$ e $+\infty$. Poiché P si trova sulla diagonale di un quadrato di lato a posto nel primo quadrante il campo \vec{B}_1 è:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi a \sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \quad (19)$$

Per i campi \vec{B}_2 e \vec{B}_3 occorre invece applicare la seconda legge di Laplace, in quanto il punto P non appartiene in nessuno dei due casi al piano che divide in due metà un filo allineato o con l'asse \hat{x} (corrente i_2) o con l'asse \hat{y} (corrente i_3). Consideriamo allora il caso della corrente i_2 : per la corrente i_3 sarà sufficiente cambiare opportunamente la direzione del vettore campo. Seguendo la notazione riportata in Figura, in cui la coordinata x è misurata a partire dal piede della perpendicolare condotta da P al filo, possiamo scrivere:



$$d\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{d\vec{x} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{\hat{x} dx \wedge r(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta)}{r^3} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{dx \sin \theta \hat{z}}{r^2} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{\sin \theta dx \hat{z}}{(x^2 + a^2)} \quad (20)$$

Ora notiamo che:

$$\tan \theta = -\frac{a}{x} \Rightarrow x = -a \cot \theta \Rightarrow dx = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (21)$$

e sostituendo nella (20) si ha:

$$d\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{\sin \theta dx \hat{z}}{(x^2 + a^2)} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \frac{\sin \theta a \hat{z} d\theta}{\sin^2 \theta a^2 (1 + \cot^2 \theta)} = \frac{\mu_0 i_2 \sin \theta \hat{z} d\theta}{4\pi a} \quad (22)$$

L'angolo θ varia da $\pi/4$ quando $x = -a$ a π quando x tende all'infinito, per cui:

$$\vec{B}_2(P) = \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\mu_0 i_2 \sin \theta \hat{z} d\theta}{4\pi a} = \frac{\mu_0 i_2 \hat{z}}{4\pi a} [-\cos \theta]_{\pi/4}^{\pi} = \hat{z} \frac{\mu_0 i_2}{4\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \quad (23)$$

Se ora consideriamo la corrente i_3 il procedimento di integrazione è analogo, ma il prodotto vettore deve essere calcolato fra il versore dell'elemento di corrente (\hat{y}) ed il vettore \vec{r} dall'elemento di corrente a P , che questa volta ha la forma: $\vec{r} = r(\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) \Rightarrow \hat{y} \wedge \vec{r} = -\hat{z} r \sin \theta$. Il campo $\vec{B}_3(P)$ si ottiene quindi dalla (23) sostituendo i_2 con i_3 e cambiando il verso:

$$\vec{B}_3(P) = -\hat{z} \frac{\mu_0 i_3}{4\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \quad (24)$$

I moduli dei tre campi valgono rispettivamente:

$$\begin{cases} |\vec{B}_1(P)| = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi a \sqrt{2}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 12}{4\pi \times 0.2 \sqrt{2}} \text{ T} = 4.24 \mu\text{T} \\ |\vec{B}_2(P)| = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8}{4\pi \times 0.2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \text{ T} = 6.83 \mu\text{T} \\ |\vec{B}_3(P)| = \frac{\mu_0 i_3}{4\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{4\pi \times 0.2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \text{ T} = 3.41 \mu\text{T} \end{cases} \quad (25)$$

Il campo risultante $\vec{B}(P)$ si ricava infine dalla somma vettoriale dei tre campi \vec{B}_1 , \vec{B}_2 e \vec{B}_3 :

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) + \vec{B}_3(P) = \frac{\mu_0}{4\pi a} \left[\left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{2} \right) i_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \hat{z} (i_2 - i_3) \right] = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi \times 0.2} \left[\left(\frac{\hat{x}-\hat{y}}{2} \right) 12 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \hat{z} (8 - 4) \right] \text{ T} = 3 \mu\text{T} \hat{x} - 3 \mu\text{T} \hat{y} + 3.41 \mu\text{T} \hat{z} \quad (26)$$

in accordo con la formula fornita nel testo.

Per quanto riguarda le considerazioni di simmetria possiamo osservare che ciascun filo, in base alla seconda legge di Laplace, deve produrre un campo in direzione ortogonale a quella della propria corrente, per cui $\vec{B}_1 \perp \hat{z}$, $\vec{B}_2 \perp \hat{x}$ e $\vec{B}_3 \perp \hat{y}$. Inoltre, poiché il punto P giace nel piano (x, y) , ogni raggio vettore condotto da un punto di uno dei due fili adiacenti allo stesso piano (correnti i_2 e i_3) al punto P stesso ha necessariamente solo componenti x e y , per cui i campi dovuti ai fili 2 e 3 devono essere entrambi paralleli a z . Infine il punto P giace sulla diagonale del primo quadrante del piano (x, y) , per cui le componenti x e y del campo dovuto al filo 3 devono essere eguali in modulo, ma non necessariamente dello stesso segno. In conclusione, le componenti x e y del campo \vec{B} sono dovute solo al filo 1, mentre la componente z è la combinazione dei contributi dovuti ai fili 2 e 3.