

## Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 09/06/2017

### Esercizio 1

1) Durante il salto dell'uomo non sono presenti forze esterne impulsive, per cui la quantità di moto totale del sistema si conserva. Si può quindi scrivere:

$$\vec{p}_{in} = \vec{0} = \vec{p}_{fin} = m\vec{V} + m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B \quad (1)$$

Inoltre la molla è inizialmente a riposo (e comunque ha un'inerzia, per cui non si accorcia o allunga istantaneamente), per cui:

$$\vec{V}_B = \vec{0} \quad (2)$$

La velocità  $\vec{u}$  è misurata nel riferimento del carrello A, cioè è la velocità relativa dell'uomo rispetto al carrello A. Pertanto la relazione fra le velocità assolute  $\vec{V}$  e  $\vec{V}_A$  e la velocità relativa  $\vec{u}$  è:

$$\vec{u} = \vec{V} - \vec{V}_A \quad (3)$$

Combinando la (3) con la (1) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} m\vec{V} = -m_A\vec{V}_A \\ \vec{u} = \vec{V} - \vec{V}_A \end{cases} \Rightarrow m\vec{V} = m(\vec{V}_A + \vec{u}) = -m_A\vec{V}_A \Rightarrow \vec{V}_A = -\vec{u} \left( \frac{m}{m+m_A} \right); \vec{V} = +\vec{u} \left( \frac{m_A}{m+m_A} \right) \quad (4)$$

2) Il lavoro delle forze muscolari dell'uomo corrisponde alla variazione di energia cinetica del sistema durante il salto stesso, in cui sia il carrello A che l'uomo acquistano una velocità non nulla. Pertanto:

$$\mathcal{L} = K_f - K_{in} = \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m V^2}{2} = \left[ \frac{m_A}{2} \left( \frac{m}{m+m_A} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{m_A}{m+m_A} \right)^2 \right] u^2 = \left( \frac{m m_A}{m+m_A} \right) \frac{u^2}{2} \quad (5)$$

3) Dopo aver eseguito il salto l'uomo non fa più parte del sistema, che quindi è formato dai due carrelli uniti dalla molla. Questo sistema è isolato, per cui la quantità di moto totale si conserva; possiamo pertanto scrivere:

$$m_A\vec{V}_A = m_A\vec{V}'_A + m_B\vec{V}'_B \quad (6)$$

dove  $\vec{V}'_A$  e  $\vec{V}'_B$  sono le velocità dei carrelli A e B in un istante generico successivo al salto. L'espressione della velocità  $\vec{V}'_B$  è perciò:

$$\vec{V}'_B = \frac{m_A}{m_B} (\vec{V}_A - \vec{V}'_A) \quad (7)$$

Quando la molla raggiunge il massimo allungamento le velocità  $\vec{V}'_B$  e  $\vec{V}'_A$  devono essere eguali, per cui:

$$\vec{V}'_A = \frac{m_A}{m_B} (\vec{V}_A - \vec{V}'_A) \Rightarrow \vec{V}'_A = \frac{m_A}{m_B + m_A} \vec{V}_A = \vec{V}'_B \quad (8)$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia e tenendo conto del fatto che inizialmente la molla è scarica si ha:

$$E = E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{m_A V_A^2}{2} + 0 = K_{fin} + U_{fin} = \frac{m_A V_A'^2}{2} + \frac{m_B V_B'^2}{2} + \frac{k \delta_{max}^2}{2} =$$

$$\frac{(m_A + m_B)}{2} \left( \frac{m_A}{m_B + m_A} \right)^2 V_A^2 + \frac{k \delta_{max}^2}{2} \Rightarrow \delta_{max}^2 = \frac{m_A V_A^2}{k} \left( 1 - \frac{m_A}{m_B + m_A} \right) = \frac{m_A m_B V_A^2}{k(m_B + m_A)} \quad (9)$$

Si ottiene quindi, sostituendo la (4) per  $V_A$ :

$$\delta_{max} = u \left( \frac{m}{m + m_A} \right) \sqrt{\frac{m_A m_B}{(m_B + m_A)k}} \quad (10)$$

In alternativa si può utilizzare esplicitamente il teorema di Koenig, ovvero scrivere l'energia cinetica dei due carrelli come somma dell'energia cinetica del centro di massa  $K_{CM}$  e dell'energia cinetica relativa  $K_{rel}$ . Poiché il moto del centro di massa del sistema dei due carrelli è rettilineo uniforme (il sistema è isolato), l'energia cinetica del centro di massa è costante, mentre l'energia cinetica relativa si può interamente trasformare in energia potenziale  $U_k$  della molla. Essendo costante l'energia totale  $E$  si ottiene:

$$E = K_{CM} + K_{rel} + U_k \Rightarrow \frac{k \delta_{max}^2}{2} = E - K_{CM} = \frac{m_A V_A^2}{2} - \frac{(m_A + m_B) V_{CM}^2}{2} \quad (11)$$

La velocità  $V_{CM}$  del centro di massa si ricava ricordando che subito dopo il salto si muove solo il carrello  $A$ ; pertanto:

$$(m_A + m_B) V_{CM} = m_A V_A \Rightarrow V_{CM} = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B} \Rightarrow \frac{k \delta_{max}^2}{2} = E - K_{CM} = \frac{m_A V_A^2}{2} - \frac{m_A^2 (m_A + m_B) V_A^2}{2(m_A + m_B)^2} \quad (12)$$

In conclusione:

$$\delta_{max}^2 = \frac{m_A V_A^2}{k} \left( 1 - \frac{m_A}{m_A + m_B} \right) = \frac{V_A^2}{k} \left( \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \right) \quad (13)$$

come nella (9).

4) Introduciamo le coordinate del centro di massa  $X_{CM}$  e la coordinata relativa  $x$  definite da:

$$\begin{cases} X_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \\ x = x_B - x_A \end{cases} \quad (14)$$

Visto che il moto avviene lungo un unico asse è sufficiente considerare una sola coordinata scalare (con il suo segno !) al posto di una grandezza vettoriale. Invertendo le (14) si ottiene:

$$\begin{cases} x_A = X_{CM} - \frac{m_B}{m_A + m_B} x \\ x_B = X_{CM} + \frac{m_A}{m_A + m_B} x \end{cases} \quad (15)$$

Moltiplicando per  $m_A$ , differenziando due volte la prima delle (15) ed applicando il secondo principio di Newton si ha:

$$m_A \ddot{x}_A = m_A \ddot{X}_{CM} - \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \ddot{x} = -F_{el} = k(x_B - x_A - l) = k(x - l) \quad (16)$$

Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme perché il sistema è isolato; la (16) si riduce quindi ad un'equazione per la sola coordinata relativa  $x$  la cui soluzione è un moto armonico. Infatti:

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \ddot{x} = -k(x - l) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2(x - l); \quad \omega^2 = \frac{k}{\left(\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\right)} = \frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B} \quad (17)$$

Inserendo condizioni iniziali generiche la soluzione completa della (17) è:

$$x(t) = l + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (18)$$

con  $C_1$  e  $C_2$  costanti da determinare tramite le condizioni iniziali. Poiché all'istante  $t = 0$  si muove solo il carrello  $A$  con velocità  $V_A$  ed i due carrelli si trovano rispettivamente in  $x_A(0) = 0$  e  $x_B(0) = l$  le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} X_{CM}(0) = \frac{m_A x_A(0) + m_B x_B(0)}{m_A + m_B} = \frac{m_B l}{m_A + m_B}; & \dot{X}_{CM}(0) = \frac{m_A \dot{x}_A(0) + m_B \dot{x}_B(0)}{m_A + m_B} = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B} \\ x(0) = x_B(0) - x_A(0) = l; & \dot{x}(0) = \dot{x}_B(0) - \dot{x}_A(0) = -V_A \end{cases} \quad (19)$$

Sostituendo le seconde delle (19) nella (18) si ha:

$$l = C_1 + l \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0; \quad \omega C_2 = -V_A \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{V_A}{\omega} \quad (20)$$

Inserendo le (20) e la condizione di moto rettilineo uniforme del centro di massa nella prima delle (15) si ottiene infine:

$$x_A(t) = X_{CM}(t) - \frac{m_B}{m_A + m_B} x(t) = \frac{m_B l}{m_A + m_B} + \frac{m_A V_A}{m_A + m_B} t - \frac{m_B}{m_A + m_B} \left( l - \frac{V_A}{\omega} \sin \omega t \right) = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B} t + \frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{V_A}{\omega} \sin \omega t \quad (21)$$

## Esercizio 2

1) Al termine del processo di carica entrambi i condensatori saranno al potenziale  $V$  della batteria, per cui:

$$Q_1 = C_1 V; \quad Q_2 = C_2 V = 2C_1 V \quad (22)$$

L'energia totale del sistema è la somma delle energie dei due condensatori carichi, ovvero:

$$U = \frac{C_1 V^2}{2} + \frac{C_2 V^2}{2} = \frac{3C_1 V^2}{2} \quad (23)$$

2) Poiché i condensatori sono isolati e disconnessi dalla batteria, le cariche  $Q_1$  e  $Q_2$  rimangono invariate, mentre nel condensatore "2" il campo elettrico varia a causa dell'inserimento del dielettrico e conseguentemente variano anche la differenza di potenziale e la capacità. Infatti la nuova capacità  $C_2'$  è  $\varepsilon$  volte quella precedente, ovvero:

$$C_2' = \varepsilon C_2 = 2\varepsilon C_1 \quad (24)$$

La nuova energia del sistema è quindi, ricordando che le cariche non variano:

$$U' = \frac{C_1 V^2}{2} + \frac{Q_2^2}{2C_2'} = \frac{C_1 V^2}{2} + \frac{C_2^2 V^2}{2 \times \epsilon C_2} = \frac{C_1 V^2}{2} + \frac{2C_1 V^2}{2\epsilon} = \frac{C_1 V^2}{2\epsilon} (2 + \epsilon) \quad (25)$$

Il lavoro per inserire il dielettrico nel condensatore è quindi:

$$\mathcal{L} = U' - U = C_1 V^2 \left( \frac{(2+\epsilon)}{2\epsilon} - \frac{3}{2} \right) = C_1 V^2 \left( \frac{(2+\epsilon)-3\epsilon}{2\epsilon} \right) = -\frac{(\epsilon-1)}{\epsilon} C_1 V^2 \quad (26)$$

Il lavoro è negativo, per cui non occorre fornire lavoro per inserire il dielettrico nel condensatore, ma è il condensatore stesso che lo risucchia. Nel processo di inserimento del dielettrico si creano infatti, a causa della polarizzazione, delle forze attrattive vicino al bordo del condensatore.

3) Le cariche all'equilibrio  $Q_{1,f}$  e  $Q_{2,f}$  si ricavano osservando che quando la situazione diventa stabile i due condensatori devono trovarsi allo stesso potenziale, per cui:

$$\frac{Q_{1,f}}{C_1} = \frac{Q_{2,f}}{C_2'} = \frac{Q_{2,f}}{2\epsilon C_1} \quad \Rightarrow \quad Q_{2,f} = 2\epsilon Q_{1,f} \quad (27)$$

Inoltre, per la conservazione della carica:

$$Q_{1,f} + Q_{2,f} = (1 + 2\epsilon)Q_{1,f} = Q_1 + Q_2 = 3C_1 V \quad (28)$$

Dalla (28) si ottiene quindi:

$$Q_{1,f} = \frac{3}{(1+2\epsilon)} C_1 V; \quad Q_{2,f} = \frac{6\epsilon}{(1+2\epsilon)} C_1 V \quad (29)$$

4) Dopo l'inserimento del dielettrico la d.d.p. ai capi del condensatore "2" è ridotta di un fattore  $\epsilon$ , per cui il sistema non è più all'equilibrio e si ha un passaggio di corrente. Applicando la seconda legge di Kirchoff alla maglia formata dai due condensatori e dalla resistenza possiamo scrivere:

$$V_1(t) = \frac{Q_1(t)}{C_1} = V_2(t) + RI = \frac{Q_2(t)}{C_2'} + RI = \frac{Q_2(t)}{2\epsilon C_1} + RI \quad (30)$$

Poiché ai capi del condensatore "2" c'è una d.d.p. inferiore a quella ai capi del condensatore "1", una corrente positiva corrisponde ad una diminuzione della carica sul condensatore "1" e ad un aumento di carica sul condensatore "2", per cui:

$$I = -\frac{dQ_1(t)}{dt} = +\frac{dQ_2(t)}{dt} \quad (31)$$

In base alla condizione di conservazione della carica possiamo scrivere:

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_1 + Q_2 = 3C_1 V \quad \Rightarrow \quad Q_2(t) = 3C_1 V - Q_1(t) \quad (32)$$

Inserendo la (31) e la (32) nella (30) si ha:

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} = \frac{3C_1 V - Q_1(t)}{2\epsilon C_1} - R \frac{dQ_1(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad R \frac{dQ_1(t)}{dt} + \frac{(1+2\epsilon) Q_1(t)}{2\epsilon C_1} = \frac{3V}{2\epsilon} \quad (33)$$

La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (33) è:

$$Q_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad \tau = \frac{2\varepsilon}{(1+2\varepsilon)}RC_1 \quad (34)$$

dove  $A$  è una costante da determinare inserendo le condizioni iniziali nella soluzione completa. Le condizioni di equilibrio sono note perché per  $t \rightarrow \infty$  la carica sul condensatore “1” è (formula (29)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_1(t) = Q_{1,f} = \frac{3C_1V}{(1+2\varepsilon)} \quad (35)$$

La soluzione completa della (33), includendo la condizione di regime (35), è quindi:

$$Q_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{3C_1V}{(1+2\varepsilon)} \quad (36)$$

All'istante  $t = 0$  la carica sul condensatore “1” è ancora quella al termine della carica iniziale, ovvero  $C_1V$ , per cui:

$$Q_1(0) = C_1V = A + \frac{3C_1V}{(1+2\varepsilon)} \Rightarrow A = \frac{2(\varepsilon-1)C_1V}{(1+2\varepsilon)} \quad (37)$$

Sostituendo nella (36) si ha infine:

$$Q_1(t) = C_1V \left( \frac{3}{(1+2\varepsilon)} + \frac{2(\varepsilon-1)}{(1+2\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (38)$$

Utilizzando la (32) si ricava l'andamento di  $Q_2(t)$ :

$$Q_2(t) = 3C_1V - Q_1(t) = C_1V \left( 3 - \frac{3}{(1+2\varepsilon)} - \frac{2(\varepsilon-1)}{(1+2\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = C_1V \left( \frac{6\varepsilon}{(1+2\varepsilon)} - \frac{2(\varepsilon-1)}{(1+2\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (39)$$

Come controllo finale possiamo verificare che a  $t = 0$  anche la carica sul condensatore “2” coincida con quella al termine della carica iniziale. Infatti:

$$Q_2(0) = C_1V \left( \frac{6\varepsilon-2\varepsilon+2}{(1+2\varepsilon)} \right) = 2C_1V \frac{(2\varepsilon+1)}{(1+2\varepsilon)} = 2C_1V = C_2V \quad (40)$$