Soluzione Compitino Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 31 Maggio 2017

Esercizio 1

1) Per simmetria il campo elettrico giace nel piano ortogonale all'asse del cilindro, ha direzione radiale e dipende solo da r, per cui è della forma $\vec{E} = \hat{r}E(r)$. Applichiamo quindi la legge di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio r e lunghezza L, coassiale con il cilindro carico:

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{1}$$

dove Q_{int} è la carica interna al cilindro gaussiano di raggio r e si è tenuto conto del fatto che a causa della direzione del campo elettrico il flusso attraverso le superfici di base di tale cilindro è nullo.
Abbiamo quindi:

$$r < a: \quad Q_{int} = 0; \tag{2a}$$
$$a < r < 2a: \quad Q_{int} = \rho\pi(r^2 - a^2)L \tag{2b}$$
$$2a < r < 3a: \quad Q_{int} = \rho\pi[((2a)^2 - a^2) - (r^2 - (2a)^2)]L = \rho\pi[7a^2 - r^2]L \tag{2c}$$
$$r > 3a: \quad Q_{int} = \rho\pi[((2a)^2 - a^2) - ((3a)^2 - (2a)^2)]L = \rho\pi[-2a^2]L = -2\rho\pi a^2 L \tag{2d}$$

Si noti che la carica calcolata in ($2d$) è l'intera carica del sistema. Si ottiene quindi:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2 - a^2}{r}\right) & a < r < 2a \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{7a^2 - r^2}{r}\right) & 2a < r < 3a \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{r}\right) & r > 3a \end{cases} \tag{3}$$

Per $r < a$ il campo è ovviamente nullo.

2) Per calcolare la differenza di potenziale conviene scegliere un percorso in direzione radiale e tenere presente che il campo elettrico è nullo per $r < a$. Pertanto:

$$V_P - V_Q = -\int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left[\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_a^{2a} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{2a}^{3a} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{3a}^{5a} \vec{E} \cdot d\vec{l}\right] \tag{4}$$

Il primo integrale è nullo, per cui è sufficiente calcolare gli altri tre. Il secondo integrale vale:

$$\int_a^{2a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{2a} \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2 - a^2}{r}\right) dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_a^{2a}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{\left|\frac{r^2}{2}\right|_a^{2a} - a^2|\ln r|_a^{2a}\right\} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{(4a^2 - a^2)}{2} - a^2\ln\left(\frac{2a}{a}\right)\right\} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{3}{2} - \ln 2\right\} \tag{5}$$

Il terzo integrale vale:

$$\int_{2a}^{3a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{2a}^{3a} \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{7a^2 - r^2}{r}\right) dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{2a}^{3a}\left(\frac{7a^2}{r} - r\right) dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{-\left|\frac{r^2}{2}\right|_{2a}^{3a} + 7a^2|\ln r|_{2a}^{3a}\right\} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{-\frac{(9a^2 - 4a^2)}{2} + 7a^2\ln\left(\frac{3a}{2a}\right)\right\} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left\{-\frac{5}{2} + 7\ln 3 - 7\ln 2\right\} \tag{6}$$

Infine il quarto integrale vale:

$$\int_{3a}^{5a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{3a}^{5a} -\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r}\right) dr = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0}\int_{3a}^{5a}\frac{dr}{r} = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0}|\ln r|_{3a}^{5a} = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5a}{3a}\right) = \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0}\{\ln 3 - \ln 5\} \tag{7}$$

Sommando si ottiene:

$$V_P - V_Q = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2} - \ln 2 - \frac{5}{2} + 7\ln 3 - 7\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 5\right] = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}[1 + 8\ln 2 - 9\ln 3 + 2\ln 5] \quad (8)$$

Poiché $[1 + 8\ln 2 - 9\ln 3 + 2\ln 5] < 0$, la differenza di potenziale è negativa, come prevedibile a priori in base alla distribuzione di carica.

3) La forza agente sulla particella è data dal prodotto del campo elettrico $\vec{E}$ a distanza r dall'asse del cilindro e della carica q della particella. Pertanto:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \hat{r}qE(r) = \hat{r}\frac{\rho q}{\varepsilon_0}\left(\frac{-a^2}{r}\right) = -\hat{r}\frac{\rho q}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r}\frac{\rho q a^2}{\varepsilon_0} \quad (9)$$

La forza è attrattiva perché la carica totale del sistema è negativa e la distribuzione di carica è tale che la distanza media della carica negativa da q è minore di quella della carica positiva.

Affinché la particella possa compiere un moto circolare uniforme intorno all'asse del cilindro è necessario che la forza calcolata in (9) produca l'accelerazione centripeta necessaria per mantenere la particella sulla traiettoria. Quindi:

$$-\frac{\hat{r}}{r}\frac{\rho q a^2}{\varepsilon_0} = -m\frac{V^2}{r}\hat{r} \Rightarrow V^2 = \frac{\rho q a^2}{m\varepsilon_0} \Rightarrow V = a\sqrt{\frac{\rho q}{m\varepsilon_0}} \quad (10)$$

È quindi sufficiente che la velocità della particella abbia il valore (10) e sia diretta ortogonalmente a $\hat{r}$. La (10) risulta, come previsto, indipendente da r perché a causa della simmetria cilindrica il campo elettrico scala come $1/r$ (per una distribuzione a simmetria sferica non sarebbe vero !); si noti peraltro che, assumendo soddisfatta la condizione (10), al variare del raggio la velocità angolare ω risulta <u>inversamente proporzionale</u> a r, cioè la frequenza di rotazione è maggiore se la carica è più vicina alla distribuzione.

4) Il valore numerico della forza e della velocità si ottengono per sostituzione diretta:

$$\left|\vec{F}(r = 5a)\right| = \frac{1}{5a}\frac{\rho q a^2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho q a}{5\varepsilon_0} = \frac{10^{-6}\ \mathrm{C/m^3} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times 2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}{5 \times 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/(Vm)}} = 7.2 \times 10^{-17}\ \mathrm{N} \quad (11)$$

$$V = \sqrt{\frac{a^2\rho q}{m\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-4}\ m^2 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^3} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}}{9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/(Vm)}}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{7.95 \times 10^{12}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2.8 \times 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (12)$$

Poiché $V \ll c$, la meccanica classica è perfettamente applicabile.

Esercizio 2

1) Dalla conoscenza della potenza dissipata e della tensione ai capi del filo che forma il solenoide si ottiene subito la resistenza R dell'avvolgimento:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{100}{500}\ \Omega = 0.2\ \Omega \quad (13)$$

La corrente del solenoide è quindi:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10}{0.2}\ \mathrm{A} = 50\ \mathrm{A} \quad (14)$$

mentre per la lunghezza l dell'avvolgimento si ha:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \Longrightarrow l = \frac{SR}{\rho} = \frac{10^{-6} \times 0.2}{2 \times 10^{-8}} \mathrm{m} = 10 \mathrm{~m} \tag{15}$$

Dall'informazione sul campo di induzione magnetica otteniamo inoltre il numero di spire per unità di lunghezza n:

$$n = \frac{B}{\mu_0 I} = \frac{400 \times 10^{-4} \mathrm{~T}}{4\pi \times 10^{-7} \,(\mathrm{Tm/A}) \times 50 \mathrm{~A}} = 636.6 \text{ spire/m} \tag{16}$$

Il numero di spire del solenoide è quindi:

$$N = nh = 636.6 \text{ spire/m} \times 0.5 \mathrm{~m} = 318 \tag{17}$$

Combinando la (15) e la (17) otteniamo infine la relazione per determinare il raggio del solenoide:

$$l = 2\pi a N \quad \Longrightarrow a = \frac{l}{2\pi N} = \frac{10 \mathrm{~m}}{2\pi \times 318} = 5 \times 10^{-3} \mathrm{~m} = 5 \mathrm{~mm} \tag{18}$$

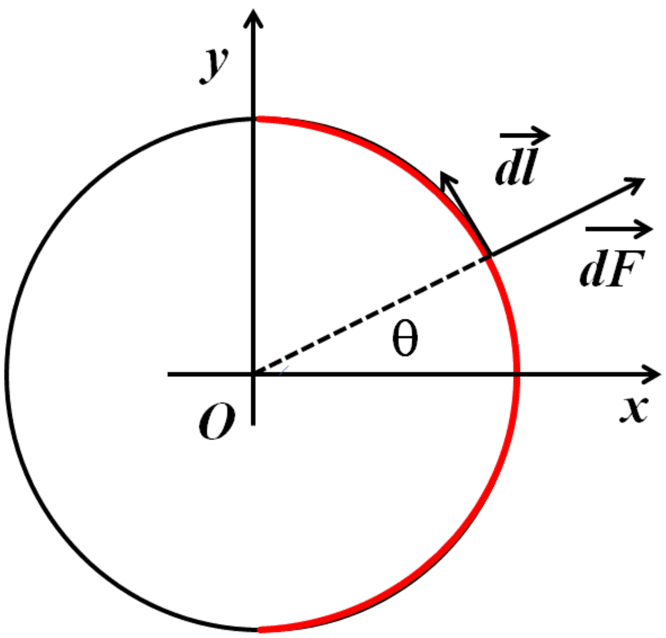
2) La densità di corrente è uniforme nella sezione del filo del solenoide, per cui:

$$|\vec{J}| = \frac{I}{S} = \frac{50}{10^{-6}} \mathrm{~A/m^2} = 5 \times 10^7 \mathrm{~A/m^2} \tag{19}$$

Il modulo del campo elettrico si ricava utilizzando la prima legge di Ohm in forma locale:

$$|\vec{E}| = \rho |\vec{J}| = 5 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-8} = 1 \mathrm{~V/m} \tag{20}$$

3) Per calcolare la forza su mezza spira utilizziamo la prima legge di Laplace, procedendo per integrazione diretta. In base al sistema di riferimento in figura si può scrivere:



$$d\vec{l} = (-\hat{x} \sin\theta + \hat{y} \cos\theta) dl = \\ = (-\hat{x} \sin\theta + \hat{y} \cos\theta) a d\theta \tag{21}$$

La forza infinitesima sull'elemento di lunghezza $d\vec{l}$ è quindi:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I(-\hat{x} \sin\theta + \hat{y} \cos\theta) a d\theta \wedge B\hat{z} = IaBd\theta(\hat{y} \sin\theta + \hat{x} \cos\theta) \tag{22}$$

La forza totale sulla mezza spira è quindi:

$$\vec{F} = IaB \left[\int_0^{+\frac{\pi}{2}} (\hat{y} \sin\theta + \hat{x} \cos\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\hat{y} \sin\theta + \hat{x} \cos\theta) d\theta \right] =$$

$$IaB\left\{[-\hat{y}\cos\theta+\hat{x}\sin\theta]_0^{+\pi/2}+[-\hat{y}\cos\theta+\hat{x}\sin\theta]_{3\pi/2}^{2\pi}\right\}=+2IaB\hat{x} \tag{23}$$

Per quanto riguarda il valore numerico del campo B da inserire nella (23), visto che la spira si trova al bordo del solenoide è corretto scegliere la media fra il campo interno $B_{int} = \mu_0 nI$ ed il campo esterno al solenoide (nullo), per cui:

$$\vec{F}=+2IaB\hat{x}=\frac{2IaB_{int}}{2}\hat{x}= IaB_{int}\,\hat{x}=0.01\,\hat{x}\text{ N} \tag{24}$$

4) La parte della superficie quadrata attraversata dalle linee di forza del solenoide corrisponde al segmento circolare $A\overset{\frown}{C}B$, la cui area può essere calcolata come differenza fra il triangolo curvilineo $A\overset{\frown}{O}B$ ed il triangolo $A\hat{O}B$. Otteniamo quindi:

$$A\left(A\overset{\frown}{C}B\right)=A\left(A\overset{\frown}{O}B\right)-A\left(A\hat{O}B\right)=\frac{2a\theta a}{2}-\frac{2a\sin\theta\; a\cos\theta}{2}=a^2(\theta-\sin\theta\cos\theta\;) \tag{25}$$

La relazione fra l'angolo θ ed il tempo t si ricava notando che:

$$\cos\theta=\frac{a-V_0t}{a}=1-\frac{V_0t}{a};\qquad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\left(\frac{2V_0t}{a}\right)-\left(\frac{V_0t}{a}\right)^2} \tag{26}$$

Inserendo la (26) nella (25) si ha:

$$A\left(A\overset{\frown}{C}B\right)=a^2\left[\arccos\left(1-\frac{V_0t}{a}\right)-\left(1-\frac{V_0t}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{2V_0t}{a}\right)-\left(\frac{V_0t}{a}\right)^2}\right] \tag{27}$$

Il flusso del campo di induzione magnetica attraverso la superficie è dunque:

$$\Phi(\vec{B})=|\vec{B}|A\left(A\overset{\frown}{C}B\right)=B_{int}a^2\left[\arccos\left(1-\frac{V_0t}{a}\right)-\left(1-\frac{V_0t}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{2V_0t}{a}\right)-\left(\frac{V_0t}{a}\right)^2}\right] \tag{28}$$