

Esercizio 1

1) Sulla tavola agiscono:

- a) la forza peso, diretta ortogonalmente al moto;
- b) le reazioni normali del piano di appoggio e del disco, entrambe dirette ortogonalmente al moto;
- c) la forza di attrito statico del disco;
- d) la forza $\vec{F}$.

Sul disco agiscono:

- a) la forza peso, diretta ortogonalmente al moto;
- b) le reazioni normali del pavimento e della tavola, entrambe dirette ortogonalmente al moto;
- c) le forze di attrito statico della tavola e del pavimento.

Poiché il moto del disco è di puro rotolamento rispetto sia al pavimento che alla tavola, i punti di contatto del disco con il pavimento e con il disco hanno rispettivamente velocità nulla (il pavimento è fermo) e velocità $\vec{V}_B$. La forza di attrito statico fra disco e pavimento non fa lavoro perché il punto di contatto è fermo e quella fra disco e tavola fa lavoro totale nullo per il principio di azione e reazione; quindi l'unica forza che fa lavoro non nullo durante il moto della sbarra nell'intervallo (t_0, t_1) è la forza $\vec{F}$.

2) Nell'intervallo (t_0, t_1) la sbarra si sposta di $L/4$, come chiaramente visibile dal confronto fra le due Figure del testo; il lavoro totale durante questo intervallo è quindi:

$$\mathcal{L} = F \Delta L = \frac{FL}{4} \quad (1)$$

e corrisponde alla variazione di energia cinetica dell'intero sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{FL}{4} = K_f - K_{in} = \frac{1}{2} M_1 V_T^2 + \frac{1}{2} M_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 - 0 \quad (2)$$

dove $I_{CM} = M_2 R^2/2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa e lo "0" corrisponde al fatto che all'istante iniziale il sistema è completamente fermo. Analizziamo ora le relazioni fra le velocità che compaiono a secondo membro. Innanzitutto, poiché il disco compie un moto di puro rotolamento rispetto al pavimento, la velocità del suo centro di massa e la velocità angolare sono legate dalla condizione:

$$V_{CM} = \omega R \Rightarrow \frac{1}{2} M_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} M_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{M_2 R^2}{2} \frac{V_{CM}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M_2 V_{CM}^2 \quad (3)$$

Inoltre, sempre per la condizione di puro rotolamento rispetto al pavimento, il punto del disco diametralmente opposto a quello di contatto con il pavimento ha velocità $2\vec{V}_{CM}$; ma tale punto è a contatto con la tavola, per cui la condizione di puro rotolamento rispetto alla tavola implica che esso abbia la stessa velocità della tavola $\vec{V}_T$. Pertanto:

$$V_T = 2V_{CM} \Rightarrow \frac{1}{2} M_1 V_T^2 + \frac{1}{2} M_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} M_1 (2V_{CM})^2 + \frac{3}{4} M_2 V_{CM}^2 = V_{CM}^2 \left(2M_1 + \frac{3}{4} M_2 \right) \quad (4)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene quindi:

$$V_{CM}^2 = \frac{\frac{FL}{4}}{\left(2M_1 + \frac{3}{4} M_2 \right)} = \frac{FL}{4} \frac{4}{(8M_1 + 3M_2)} \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{FL}{(8M_1 + 3M_2)}} \quad (5)$$

3) La tavola è soggetta, lungo l'asse orizzontale, alla forza $\vec{F}$ ed alla forza di attrito statico del disco $\vec{F}_A$, entrambe per ipotesi costanti nel tempo; il moto della tavola è quindi uniformemente accelerato, ma per calcolare l'accelerazione $\vec{a}_T$ non si può usare la legge del moto di Newton, visto che $\vec{F}_A$ è ignota. Tuttavia sappiamo che la tavola ha raggiunto una velocità di modulo $V_B = 2V_{CM}$ in un tratto di lunghezza $s = L/4$ accelerando uniformemente e partendo da ferma. La relazione cinematica (ricavabile anche tramite il teorema delle forze vive) fra queste grandezze è:

$$V_T^2 - V_T^2(0) = 4V_{CM}^2 = 2a_T s = \frac{a_T L}{2} \Rightarrow a_T = \frac{8V_{CM}^2}{L} = \frac{8FL}{(8M_1 + 3M_2)L} = \frac{8F}{(8M_1 + 3M_2)} \quad (6)$$

Il tempo t_1 necessario per raggiungere la velocità V_T è quindi:

$$t_1 = \frac{V_T}{a_T} = \frac{2V_{CM}L}{8V_{CM}^2} = \frac{L}{4V_{CM}} = \frac{L}{4\sqrt{\frac{FL}{(8M_1 + 3M_2)}}} = \sqrt{\frac{(8M_1 + 3M_2)L}{16F}} \quad (7)$$

4) La forza di attrito statico fra la tavola ed il disco si ricava dall'equazione del moto di Newton applicata alla tavola:

$$M_1 \vec{a}_T = \sum \vec{F}_T = \vec{F} + \vec{F}_A \Rightarrow \text{sull'asse orizzontale } M_1 a_T = F - F_A \quad (8)$$

Risolvendo la (8) per F_A e chiamando $\hat{x}$ l'asse orizzontale si ottiene:

$$\vec{F}_A = \hat{x}F_A = M_1 \vec{a}_T - \vec{F} = \left(\frac{8FM_1}{8M_1 + 3M_2} - F \right) \hat{x} = -\hat{x} \left(\frac{3M_2}{8M_1 + 3M_2} \right) F \quad (9)$$

La forza di attrito si annulla se la massa del disco è zero, come deve essere.

Nota. È anche possibile rispondere contemporaneamente alle domande 3) e 4) utilizzando l'equazione (8) e la seconda equazione cardinale della meccanica applicata al punto di contatto fra il disco ed il pavimento. Poiché l'unica forza che ha momento rispetto al punto P di contatto fra pavimento e disco è la forza di attrito esercitata dalla tavola sul disco, cioè l'opposto di $\vec{F}_A$, si ha:

$$\vec{\tau} = 2\vec{R} \wedge (-\vec{F}_A) = 2\vec{R} \wedge (-(M_1 \vec{a}_T - \vec{F})) = 2\vec{R} \wedge \vec{F} - 2\vec{R} \wedge M_1 \vec{a}_T = I_P \vec{\alpha} = \frac{3}{2} M_2 R^2 \vec{\alpha} \quad (10)$$

dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare del disco. La condizione di puro rotolamento per $\vec{V}_T$ e $\vec{V}_{CM}$ diventa per le accelerazioni: $\vec{a}_T = 2\vec{\alpha} \wedge \vec{R}$ da cui, chiamando $\hat{z}$ l'asse di rotazione:

$$2\vec{R} \wedge \vec{F} = 2RF\hat{z} = \frac{3}{2} M_2 R^2 \vec{\alpha} + 2M_1 \vec{R} \wedge (2\vec{\alpha} \wedge \vec{R}) = \frac{3}{2} M_2 R^2 \vec{\alpha} + 4M_1 R^2 \vec{\alpha} = \frac{R^2 \vec{\alpha}}{2} (8M_1 + 3M_2) \quad (11)$$

L'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ (non richiesta nell'esercizio) è dunque:

$$\vec{\alpha} = \frac{4RF\hat{z}}{(8M_1 + 3M_2)R^2} \Rightarrow \vec{a}_T = 2\vec{\alpha} \wedge \vec{R} = \frac{8F}{(8M_1 + 3M_2)} \hat{x} = \frac{8\vec{F}}{(8M_1 + 3M_2)} \quad (12)$$

come nella (6). Una volta nota $\vec{a}_T$ si procede come in precedenza per determinare t_1 e $\vec{F}_A$.

Esercizio 2

1) La legge oraria del pianeta vista dal centro della sua traiettoria, tenendo conto delle condizioni iniziali, è:

$$\begin{cases} x'(t) = r \cos(\omega t) = \frac{R}{3} \cos(5\Omega t) \\ y'(t) = r \sin(\omega t) = \frac{R}{3} \sin(5\Omega t) \end{cases} \quad (13)$$

A sua volta la legge oraria del centro della traiettoria vista dalla terra è:

$$\begin{cases} x_c(t) = R \cos(\Omega t) \\ y_c(t) = R \sin(\Omega t) \end{cases} \quad (14)$$

Combinando le (13) e le (14) si ottiene la legge oraria del pianeta nel riferimento della terra:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + x_c(t) = R \cos(\Omega t) + \frac{R}{3} \cos(5\Omega t) = R \left[\cos(\Omega t) + \frac{\cos(5\Omega t)}{3} \right] \\ y(t) = y'(t) + y_c(t) = R \sin(\Omega t) + \frac{R}{3} \sin(5\Omega t) = R \left[\sin(\Omega t) + \frac{\sin(5\Omega t)}{3} \right] \end{cases} \quad (15)$$

2) La distanza $d(t)$ del pianeta dalla terra si ottiene immediatamente dalle (15) calcolando la somma quadratica delle coordinate $x(t)$ e $y(t)$ (teorema di Pitagora). Pertanto:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R \sqrt{\left[\cos(\Omega t) + \frac{\cos(5\Omega t)}{3} \right]^2 + \left[\sin(\Omega t) + \frac{\sin(5\Omega t)}{3} \right]^2} = \\ &= R \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}(\cos(\Omega t) \cos(5\Omega t) + \sin(\Omega t) \sin(5\Omega t))} = R \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3} \cos(4\Omega t)} \end{aligned} \quad (16)$$

La distanza massima si ottiene per

$$\cos(4\Omega t) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\Omega t = 2k\pi \quad t = \frac{k\pi}{2\Omega} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

La distanza massima corrispondente è quindi:

$$d_{Max} = R \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3}} = R \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}R = R + r \quad (18)$$

come prevedibile. Analogamente la distanza minima si ottiene per

$$\cos(4\Omega t) = -1 \quad \Rightarrow \quad 4\Omega t = (2k+1)\pi \quad t = \frac{(2k+1)\pi}{4\Omega} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

La distanza minima corrispondente è quindi:

$$d_{Min} = R \sqrt{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}} = R \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}R = R - r \quad (20)$$

risultato anch'esso largamente prevedibile.

L'intersezione con la circonferenza di raggio R avviene infine negli istanti per cui vale la relazione:

$$R = R \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3} \cos(4\Omega t)} \Rightarrow \frac{2}{3} \cos(4\Omega t) = -\frac{1}{9} \Rightarrow \cos(4\Omega t) = -\frac{1}{6} \Rightarrow t = \frac{\arccos(-1/6) + 2k\pi}{4\Omega} \quad (21)$$

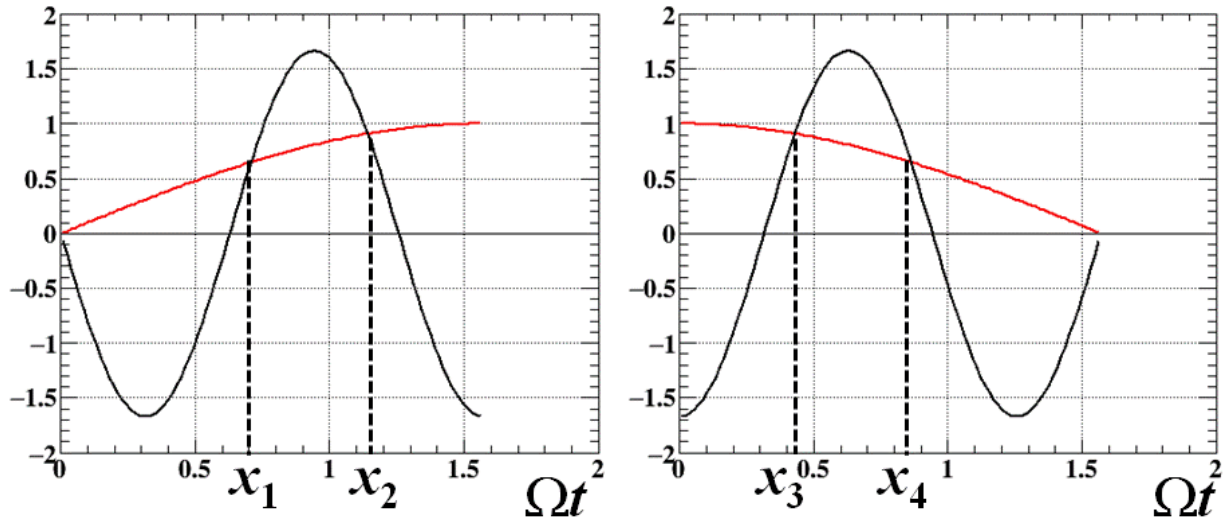
3) Le componenti si calcolano eseguendo direttamente le derivate delle (15):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\Omega R \left[\sin(\Omega t) + \frac{5}{3} \sin(5\Omega t) \right] \\ \dot{y}(t) = +\Omega R \left[\cos(\Omega t) + \frac{5}{3} \cos(5\Omega t) \right] \end{cases} \quad (22)$$

Poiché per definizione $\Omega R > 0$, la componente $\dot{x}(t)$ è positiva quando la parentesi quadra nella prima delle (22) è negativa e la componente $\dot{y}(t)$ è positiva quando la parentesi quadra nella seconda delle (22) è positiva, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) > 0 \Rightarrow \sin(\Omega t) + \frac{5}{3} \sin(5\Omega t) < 0 \Rightarrow \sin(\Omega t) < -\frac{5}{3} \sin(5\Omega t) \\ \dot{y}(t) > 0 \Rightarrow \cos(\Omega t) + \frac{5}{3} \cos(5\Omega t) > 0 \Rightarrow \cos(\Omega t) > -\frac{5}{3} \cos(5\Omega t) \end{cases} \quad (23)$$

Le (23) non sono banalmente risolubili in maniera analitica, ma si possono trarre delle informazioni semiquantitative confrontando nei due grafici che seguono rispettivamente le coppie di funzioni $(\sin(\Omega t), -\frac{5}{3} \sin(5\Omega t))$ a sinistra e $(\cos(\Omega t), -\frac{5}{3} \cos(5\Omega t))$ a destra, restringendoci come suggerito nel testo all'intervallo $(0 < \Omega t < \pi/2)$. Le funzioni $\sin(\Omega t)$ e $\cos(\Omega t)$ sono disegnate in rosso, le altre in nero.



Nel grafico di sinistra le due curve si intersecano per due valori di Ωt , che indicheremo in ordine crescente con x_1 e x_2 ; nel grafico di destra le curve si intersecano per due valori di Ωt , diversi dai precedenti, che indicheremo in ordine crescente con x_3 e x_4 . Dal confronto fra i due grafici si deduce “a vista” che:

$$x_3 < x_1 < x_4 < x_2$$

Le disuguaglianze (23) sono verificate rispettivamente per $(x_1 < \Omega t < x_2)$ e per $(\Omega t < x_3)$ o $(\Omega t > x_4)$. Possiamo quindi concludere che:

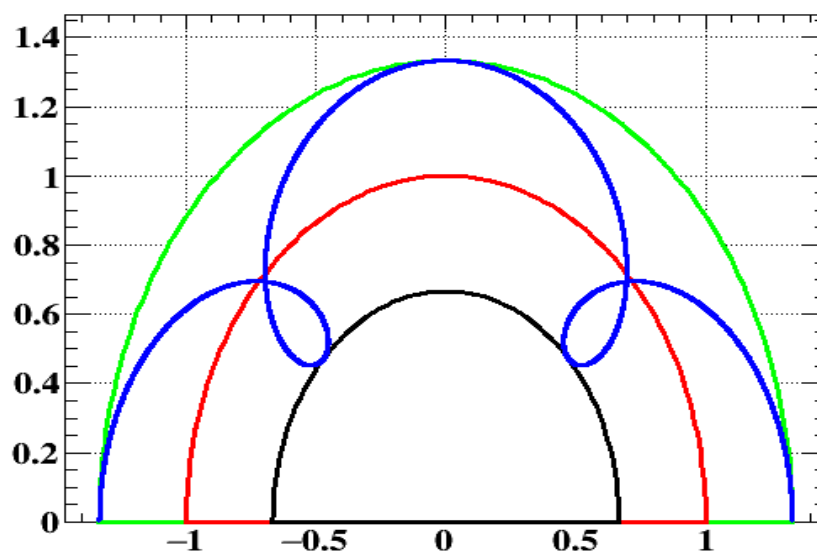
$$\begin{cases} 0 < \Omega t < x_3 & \Rightarrow \dot{x}(t) < 0; \dot{y}(t) > 0 \\ x_3 < \Omega t < x_1 & \Rightarrow \dot{x}(t) < 0; \dot{y}(t) < 0 \\ x_1 < \Omega t < x_4 & \Rightarrow \dot{x}(t) > 0; \dot{y}(t) < 0 \\ x_4 < \Omega t < x_2 & \Rightarrow \dot{x}(t) > 0; \dot{y}(t) > 0 \\ x_2 < \Omega t < \pi/2 & \Rightarrow \dot{x}(t) < 0; \dot{y}(t) > 0 \end{cases} \quad (24)$$

Le due componenti della velocità sono quindi entrambe positive nel quarto intervallo ed entrambe negative nel secondo; negli altri intervalli hanno segni opposti, per cui le corrispondenti coordinate $x(t)$ e $y(t)$ sono l'una crescente e l'altra decrescente e viceversa.

4) Per disegnare qualitativamente la traiettoria limitiamoci all'intervallo $(0 < \Omega t < \pi)$, per cui in base alle (15) $x(t)$ varia fra $-(R+r)$ e $+(R+r)$ e $y(t)$ varia fra 0 e $(R+r)$. In accordo con la (17) la massima distanza del pianeta dalla terra si ha, all'interno di questo intervallo temporale, per $(\Omega t = 0, \pi/2, \pi)$ e in accordo con la (19) la minima si ha per $(\Omega t = \pi/4, 3\pi/4)$. Dall'analisi degli intervalli (24) ed in base alle condizioni iniziali fornite nel testo possiamo concludere che nella traiettoria esistono:

- 1) un primo tratto in cui $x(t)$ diminuisce e $y(t)$ aumenta;
- 2) un secondo tratto in cui $x(t)$ diminuisce e $y(t)$ diminuisce;
- 3) un terzo tratto in cui $x(t)$ aumenta e $y(t)$ diminuisce;
- 4) un quarto tratto in cui $x(t)$ diminuisce e $y(t)$ aumenta;
- 5) un quinto tratto in cui $x(t)$ diminuisce e $y(t)$ aumenta.

Al termine del quinto tratto la distanza dal pianeta è massima; le formule (15) garantiscono inoltre che nell'intervallo di tempo $(\pi/2 < \Omega t < \pi)$ la traiettoria sarà simmetrica rispetto all'asse y di quella studiata in dettaglio nell'intervallo di tempo $(0 < \Omega t < \pi/2)$. Otteniamo quindi il disegno qualitativo mostrato nella Figura seguente in cui si è scelto $R = 1$.



La curva rossa rappresenta la traiettoria del centro mobile, le curve nera e verde rappresentano le distanze minima e massima dalla terra e la curva blu rappresenta il moto del pianeta visto dalla terra. Come si può osservare la traiettoria contiene due “riccioli”, uno per $x > 0$ ed uno per $x < 0$, in cui il pianeta appare muoversi in maniera contraria al moto del centro mobile, cioè compiere un moto “retrogrado”.