Soluzione compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 21 Febbraio 2017

Esercizio 1

1) L'unica forza agente sulla massa m è la forza dovuta all'allungamento della molla. Chiamando $\vec{r}$ il raggio vettore dal punto P alla massa m, il cui modulo è l'allungamento della molla, si ha:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} = -k\vec{r} \qquad \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1}$$

La velocità angolare della massa in moto circolare uniforme è quindi eguale alla pulsazione della molla.
La condizione di moto circolare uniforme è un vincolo, per cui introduce una relazione fra il raggio vettore $\vec{r}$ e la velocita $\vec{V}$; tale relazione è equivalente ad una costante di integrazione, ma l'equazione differenziale della molla è un'equazione del secondo ordine, per cui sono necessarie due costanti di integrazione. La sola condizione di moto circolare uniforme non è quindi sufficiente.
2) Scriviamo l'energia meccanica totale (potenziale più cinetica) della massa m:

$$E_0 = U + K = \frac{k}{2}R_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{k}{2}R_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R_0^2 = \frac{R_0^2}{2}(k + m\omega^2) = \frac{R_0^2}{2}2k \quad \Rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{E_0}{k}} \tag{2}$$

Si noti che l'energia cinetica K e l'energia potenziale U sono eguali. Infine:

$$V_0 = \omega R_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{E_0}{k}} = \sqrt{\frac{E_0}{m}} \tag{3}$$

3) Calcoliamo innanzitutto il nuovo valore della velocità della massa, tenendo conto del fatto che l'energia totale non è cambiata:

$$E_0 = U + K = \frac{k}{2}R'^2 + \frac{1}{2}mV'^2 = \frac{k}{2}\frac{25}{16}R_0^2 + \frac{1}{2}mV'^2 = kR_0^2 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}mV'^2 = kR_0^2\left(1 - \frac{25}{32}\right) = \frac{7}{32}kR_0^2 \tag{4}$$

da cui:

$$V' = \sqrt{\frac{7}{32}kR_0^2\frac{2}{m}} = R_0\sqrt{\frac{7}{16}\frac{k}{m}} = \omega R_0\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}V_0 = \sqrt{\frac{7E_0}{16m}} \tag{5}$$

Nel sistema non sono presenti forze non conservative, per cui l'energia meccanica si conserva. Inoltre, visto che l'unica forza presente è diretta lungo la congiungente fra il perno P e la massa m, si conserva anche il momento angolare $\vec{\ell}_P$ rispetto a P, perché la forza è parallela al raggio vettore (forza centrale). All'istante $t = 0$ la forza elastica della molla ha modulo $F_{el} = kR' = (5/4)kR_0$ mentre il prodotto della massa per l'accelerazione centripeta è: $ma_C = m\left(V'^2/R'\right) = \frac{7mE_0}{16m}\frac{4}{5R_0} = \frac{7}{20}\frac{E_0}{R_0} = \frac{7}{20}\frac{kR_0^2}{R_0} = \left(\frac{7}{20}\right)kR_0$. Poiché la forza della molla è superiore al prodotto ma_C, la molla si contrae e la sua lunghezza si riduce. D'altra parte il momento angolare si conserva, per cui la velocità della massa aumenta. Infatti siano $\overrightarrow{R^*}$ e $\overrightarrow{V^*}$ l'allungamento della molla e la velocità della massa in una posizione qualsiasi; se $\overrightarrow{R^*}$ e $\overrightarrow{V^*}$ sono perpendicolari, dalla conservazione del modulo del momento angolare si ha:

$$\left|\vec{\ell}_P\right| = mR'V' = mR^*V^* \quad \Rightarrow V^* = \frac{R'V'}{R^*} = \frac{5}{4}\frac{R_0V_0}{R^*}\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{16}\frac{R_0V_0}{R^*} \tag{6}$$

L'energia totale E_0 è composta da un termine cinetico ed uno potenziale, entrambi positivi. Se R^* fosse nullo, la velocità V^* divergerebbe e quindi anche l'energia cinetica non sarebbe limitata, il che contrasta con il fatto che per la non negatività dell'energia potenziale deve risultare $K \leq E_0$. Quindi la molla non può contrarsi fino all'origine ed esiste una lunghezza minima R_m; la molla si accorcia fino a R_m e poi inizia ad allungarsi. Ovviamente esiste anche una lunghezza massima R_M: infatti se l'allungamento potesse essere qualsiasi si potrebbe ottenere un'energia potenziale $U > E_0$, che è impossibile visto che l'energia cinetica è non negativa. In conclusione la molla con la massa connessa <u>compie un'orbita a velocità non uniforme</u> attorno a P e la sua lunghezza oscilla fra R_m e R_M. Possiamo inoltre notare che in corrispondenza di questi punti la velocità e la direzione della molla sono ortogonali: infatti se la velocità avesse una componente nella direzione della molla la lunghezza della molla continuerebbe a cambiare, per cui non sarebbe in un punto di minimo o massimo (si ricordi che la velocità in direzione radiale è la derivata del modulo del raggio vettore, per cui deve essere nulla quando tale modulo ha un valore estremo).

4) Indichiamo con R^* e V^* i punti in cui velocità e direzione della molla sono ortogonali. Dalla conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare si ha:

$$E_0 = \frac{1}{2}kR^{*2} + \frac{1}{2}mV^{*2} = kR_0^2 \tag{7}$$

$$V^* = \frac{R'V'}{R^*} = \frac{5\sqrt{7}}{16}\frac{R_0V_0}{R^*} \tag{8}$$

come nella (6). Sostituendo l'espressione (8) nella (7) otteniamo:

$$\frac{kR^{*2}}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{5\sqrt{7}}{16}\frac{R_0V_0}{R^*}\right)^2 = \frac{kR^{*2}}{2} + \frac{m}{2}\frac{25\times 7}{256}\frac{R_0^2V_0^2}{R^{*2}} = \frac{kR^{*2}}{2} + \frac{175}{512}\frac{mR_0^2V_0^2}{R^{*2}} = kR_0^2 \tag{9}$$

Eliminando dal denominatore il fattore R^{*2} e portando tutti i termini a sinistra otteniamo l'equazione di quarto grado:

$$\frac{kR^{*4}}{2} - kR_0^2R^{*2} + \frac{175}{512}mR_0^2V_0^2 = 0 \tag{10}$$

Pur essendo di quarto grado la (10) è risolubile, perché contiene solo i termini in R^{*2} e R^{*4}, cioè nessuna potenza dispari di R^*. Pertanto:

$$R^{*2} = \frac{kR_0^2 \pm \sqrt{k^2R_0^4 - 4\frac{k}{2}\times\frac{175}{512}mR_0^2V_0^2}}{2\frac{k}{2}} = \frac{kR_0^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{175}{256}\times\frac{mV_0^2}{R_0^2k}}\right)}{k} = R_0^2\left(1 \pm \sqrt{\frac{81}{256}}\right) \tag{11}$$

dove si è sfruttato il fatto che (formule (2) e (3)) $mV_0^2 = kR_0^2$. Le soluzioni sono entrambe positive, per cui sono tutte e due valide. Quindi:

$$R^{*2} = \begin{cases} R_0^2\left(1 + \frac{9}{16}\right) = \frac{25}{16}R_0^2 \\ R_0^2\left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{16}R_0^2 \end{cases} \tag{12}$$

Ciascuna delle (12) corrisponde a due soluzioni di segno opposto, ma chiaramente la negativa deve essere scartata. Pertanto:

$$R^* = \begin{cases} \frac{5}{4}R_0 \\ \frac{\sqrt{7}}{4}R_0 \end{cases} \tag{13}$$

Una delle due soluzioni corrisponde, come prevedibile, a R', mentre l'altra contiene lo stesso fattore $\sqrt{7}/4$ che compare nella formula per V'. Anche questo fatto non è sorprendente: in virtù della conservazione del momento angolare, nei punti in cui velocità e direzione della molla sono perpendicolari il modulo della velocità è inversamente proporzionale all'allungamento. Al punto di massimo dell'allungamento deve quindi corrispondere il punto di minimo della velocità e viceversa, con lo stesso fattore di proporzionalità fra minimo e massimo o rispetto ai valori di riferimento (R_0 e V_0).
Come prevedibile si ottiene infatti:

$$V^* = \frac{R_0 V_0}{R^*} = \begin{cases} \frac{\sqrt{7}}{4} V_0 \\ \frac{5}{4} V_0 \end{cases} \tag{14}$$

Esercizio 2

1) Il campo elettrico è a simmetria sferica, per cui dipende solo dalla distanza r dal centro della distribuzione ed è diretto come il versore $\hat{r}$; la sua forma funzionale è quindi: $\vec{E}(r) = \hat{r}E(r)$. Possiamo dunque applicare la legge di Gauss; detti $Q(r)$ la carica contenuta all'interno di una sfera di raggio r e $\Phi_r(\vec{E})$ il flusso del campo elettrico attraverso tale sfera si ha:

$$\Phi_r(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad \text{con} \quad Q(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \rho \frac{4\pi}{3}(r^3 - a^3) & a < r < 3a \\ Q + (-Q/2) = Q/2 & r > 3a \end{cases} \tag{15}$$

La densità di carica ρ nella sfera si può calcolare partendo dalla carica totale Q della distribuzione:

$$Q = \rho \frac{4\pi}{3}((3a)^3 - a^3) = \rho \frac{4\pi}{3} 26a^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi} \frac{1}{26a^3} \Rightarrow Q(a < r < 3a) = Q\left(\frac{r^3 - a^3}{26a^3}\right) = \frac{Q}{26}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^3 - 1\right) \tag{16}$$

Sostituendo nella (15) e risolvendo per $E(r)$ si ottiene:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{26} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^3 - 1\right) & a < r < 3a \\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2} & r > 3a \end{cases} \tag{17}$$

2) Per determinare il potenziale in funzione della distanza r dalla distribuzione si utilizza la definizione, partendo dalla regione esterna ($r > 3a$):

$$V(\infty) - V(r > 3a) = -\int_r^{+\infty} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\int_r^{+\infty} E(r)dr = -\int_r^{+\infty} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' \tag{18}$$

Inserendo la condizione di potenziale nullo a distanza infinita e cambiando i segni si ha:

$$V(r > 3a) = \int_r^{+\infty} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r} \tag{19}$$

In particolare, per continuità:

$$V(r = 3a) = \frac{Q}{24\pi\varepsilon_0 a} \tag{20}$$

Utilizzando la (20) come riferimento possiamo quindi scrivere:

$$V(3a) - V(a < r < 3a) = -\int_r^{3a} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\int_r^{3a} E(r)dr = -\int_r^{3a} \frac{Q}{26} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\left(\left(\frac{r'}{a}\right)^3 - 1\right)dr' \qquad (21)$$

da cui:

$$V(a < r < 3a) = V(3a) + \int_r^{3a} \frac{Q}{26} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\left(\left(\frac{r'}{a}\right)^3 - 1\right)dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{13}\int_r^{3a}\left(\frac{r'}{a^2} - \frac{a}{r'^2}\right)dr'\right) \qquad (22)$$

L'ultimo integrale vale:

$$\int_r^{3a}\left(\frac{r'}{a^2} - \frac{a}{r'^2}\right)dr' = \left[\frac{r'^2}{2a^2} + \frac{a}{r'}\right]_r^{3a} = \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{3} - \frac{r^2}{2a^2} - \frac{a}{r}\right) = \left(\frac{29}{6} - \frac{r^2}{2a^2} - \frac{a}{r}\right) \Rightarrow$$

$$V(a < r < 3a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{13}\left(\frac{29}{6} - \frac{r^2}{2a^2} - \frac{a}{r}\right)\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{55}{78} - \frac{r^2}{26a^2} - \frac{a}{13r}\right) \qquad (23)$$

In particolare:

$$V(a) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{55}{78} - \frac{1}{26} - \frac{1}{13}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{55-3-6}{78}\right) = \frac{23}{39}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \qquad (24)$$

Nella regione interna $(r < a)$ il campo elettrico è nullo, per cui il potenziale non cambia. Pertanto:

$$V(r < a) = V(a) = \frac{23}{39}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \qquad (25)$$

Sostituendo i valori numerici: $V(a) = 26.5$ V; $V(3a) = 15.0$ V.

3) L'unica forza agente sul protone è la forza elettrostatica che è conservativa, per cui possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica, ricordando che a distanza infinita dalla distribuzione il potenziale è nullo e che la condizione di minima velocità iniziale si impone richiedendo che il protone giunga sulla sfera esterna con velocità nulla. Pertanto:

$$E_{in} = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}mV_0^2 + 0 = E_f = K_f + U_f = 0 + eV(3a) \quad \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2eV(3a)}{m}} = \sqrt{\frac{Qe}{12\pi m\varepsilon_0 a}} \qquad (26)$$

Numericamente si ha:

$$V_0 = \sqrt{\frac{10^{-9} \times 1.6 \times 10^{-19}}{12\pi \times 1.67 \times 10^{-27} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-1}}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.36 \times 10^4 \text{ m/s} \qquad (27)$$

4) Quando la superficie conduttrice esterna viene connessa a terra, il campo elettrico per $r > 3a$ si annulla: infatti, essendo tale campo elettrico a segno costante (proporzionale alla carica totale della distribuzione) ed essendo la differenza di potenziale, cioè l'integrale del campo, fra l'infinito e la sfera esterna eguale a zero, il campo deve essere nullo ovunque. Questa condizione si realizza richiedendo che la carica totale della distribuzione sia zero, per cui sulla sfera esterna si deve depositare una carica $-Q$ per annullare l'effetto della carica nella regione $a < r < 3a$. All'interno della distribuzione invece non c'è variazione di carica, per cui le cariche ed i campi elettrici per $r < a$ e $a < r < 3a$ non cambiano.