

Esercizio 1

1) Sul corpo di massa m agiscono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione della guida \vec{T} , per cui la sua equazione del moto è:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{R} + m\vec{a}_T \quad (1)$$

dove abbiamo distinto le componenti radiale (centripeta) e tangenziale dell'accelerazione. Proiettando l'equazione (1) sulla direzione radiale e su quella tangenziale, definite localmente dall'angolo θ nella Figura del testo, otteniamo:

$$\begin{cases} mg \cos \theta = ma_T \Rightarrow a_T = g \cos \theta \\ T - mg \sin \theta = m\omega^2 R = m \frac{V^2(\theta)}{R} \Rightarrow T = m \left(g \sin \theta + \frac{V^2(\theta)}{R} \right) \end{cases} \quad (2)$$

dove $V(\theta)$ è la velocità del corpo in corrispondenza dell'angolo θ . Per determinare $V(\theta)$ possiamo sfruttare la conservazione dell'energia fra il punto A , in cui $\theta = 0$, ed un punto generico, visto che lo scivolo è liscio. Si ha quindi:

$$E = K_{\theta=0} + U_{\theta=0} = 0 + mgR = K_{\theta} + U_{\theta} = \frac{mV^2(\theta)}{2} + mgR(1 - \sin \theta) \quad (3)$$

Risolviendo la (3) per $V^2(\theta)$ si ottiene:

$$\frac{mV^2(\theta)}{2} = mgR \sin \theta \Rightarrow V^2(\theta) = 2gR \sin \theta \quad (4)$$

Sostituendo nella (2) si ricava infine:

$$T = m \left(g \sin \theta + \frac{2gR \sin \theta}{R} \right) = 3mg \sin \theta \quad (5)$$

2) Nell'urto nel punto B non sono presenti forze esterne impulsive, per cui si conserva la quantità di moto totale. Dette quindi \vec{V}_i la velocità del corpo di massa m prima dell'urto e \vec{V}_f la velocità dei due corpi dopo l'urto si ha:

$$m\vec{V}_i = (m + M)\vec{V}_f = 3m\vec{V}_f \Rightarrow \vec{V}_f = \frac{\vec{V}_i}{3} \quad (6)$$

L'energia cinetica del corpo di massa m prima dell'urto è:

$$K_i = \frac{1}{2} m V_i^2 \quad (7)$$

mentre quella dei due corpi uniti dopo l'urto è:

$$K_f = \frac{1}{2} (m + M) V_f^2 = \frac{3m}{2} V_f^2 = \frac{3m}{2} \frac{V_i^2}{9} = \frac{1}{2} \frac{m V_i^2}{3} = \frac{K_i}{3} \quad (8)$$

da cui infine:

$$\frac{\Delta E}{K_i} = \frac{\frac{K_i}{3} - K_i}{K_i} = -\frac{2}{3} \quad (9)$$

3) I due corpi si arrestano a causa del lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico \vec{F}_D nel tratto L per cui, con la stessa notazione del punto 2):

$$\mathcal{L}_{\vec{F}_D} = -\mu_D |\vec{N}| L = -\mu_D (m+M)gL = -3\mu_D mgL = \Delta K = 0 - K_f = -\frac{K_i}{3} = -\frac{1}{6} mV_i^2 \quad (10)$$

La velocità iniziale V_i si ottiene dalla (4) notando che nel punto B l'angolo θ vale $\pi/2$. Pertanto $V_i^2 = 2gR$, da cui:

$$\mu_D = \frac{-\frac{1}{6} mV_i^2}{-3mgL} = \frac{V_i^2}{18gL} = \frac{2gR}{18gL} = \frac{R}{9L} = 0.0555 \quad (11)$$

4) L'equazione del moto dei due corpi sul piano orizzontale in assenza di attrito dinamico, ma in presenza di attrito viscoso, è:

$$(m+M)\vec{a} = 3m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\beta\vec{V} \quad (12)$$

Poiché il moto è unidimensionale si può riscrivere la (12) eliminando i vettori nella forma:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{3m} V \quad (13)$$

La soluzione della (13) è un moto esponenzialmente smorzato, con costante tempo $(3m/\beta)$ e velocità iniziale V_f . Pertanto:

$$V(t) = V_f \exp\left(-\frac{\beta t}{3m}\right) = \frac{\sqrt{2gR}}{3} \exp\left(-\frac{\beta t}{3m}\right) \quad (14)$$

Lo spazio percorso S si ottiene integrando la (14) fra $t = 0$ e $t = \infty$:

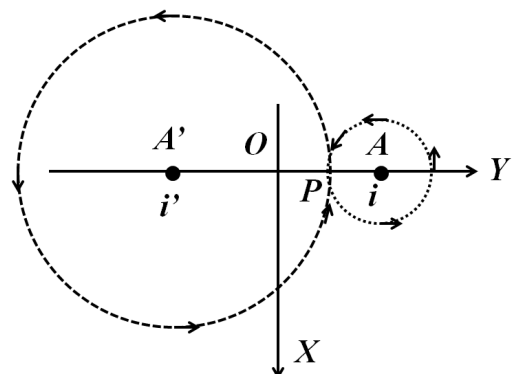
$$S = \int_0^\infty V(t) dt = \frac{\sqrt{2gR}}{3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta t}{3m}\right) dt = \frac{\sqrt{2gR}}{3} \frac{3m}{\beta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta t}{3m}\right) d\left(\frac{\beta t}{3m}\right) = \frac{m\sqrt{2gR}}{\beta} \quad (15)$$

Imponendo la condizione richiesta $S = L$ si ha infine:

$$\frac{m\sqrt{2gR}}{\beta} = L \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{m\sqrt{2gR}}{L} = \frac{1 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.5}}{1} \text{ kg/s} = 3.13 \text{ kg/s} \quad (16)$$

Esercizio 2

1) I campi dei due fili presi singolarmente sono diretti tangenzialmente attorno al filo, per cui le loro linee di forza nel piano (x, y) sono circonferenze centrate nel punto in cui il filo incontra il piano, cioè rispettivamente in $A(0, 2a, 0)$ ed in $A'(0, -2a, 0)$. Quando queste linee di forza passano per l'ordinata nel punto $P(0, a, 0)$ (vd. Figura) il campo del filo centrato in A è diretto nel verso positivo dell'asse x , mentre quello del filo centrato in A' è diretto nel verso negativo



dell'asse x se $i' > 0$ e diretto nel verso positivo dell'asse x se $i' < 0$. Scriviamo quindi il campo assumendo $i' > 0$; se in base ai calcoli dovesse risultare $i' < 0$ il segno di i' definirebbe correttamente il verso del campo. I campi \vec{B} e \vec{B}' prodotti nel punto $P(0,a,0)$ dal filo posto in A e dal filo posto in A' sono quindi rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{B} = +\hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{|AP|} = +\hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{|(0,2a,0)-(0,a,0)|} = +\hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \\ \vec{B}' = -\hat{x} \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \frac{1}{|A'P|} = -\hat{x} \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \frac{1}{|(0,-2a,0)-(0,a,0)|} = -\hat{x} \frac{\mu_0 i'}{2\pi 3a} \end{cases} \quad (17)$$

per cui il campo risultante è:

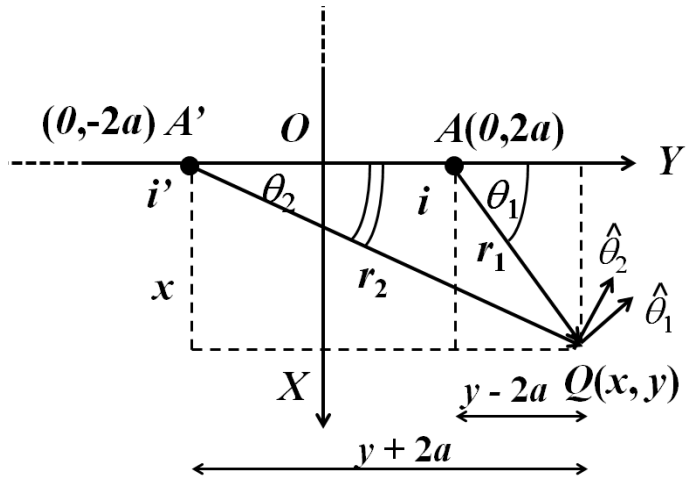
$$\vec{B}_{tot} = \vec{B} + \vec{B}' = \hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi a} - \hat{x} \frac{\mu_0 i'}{2\pi 3a} = \hat{x} \frac{\mu_0}{2\pi a} \left(i - \frac{i'}{3} \right) = \hat{x} \frac{\mu_0 i}{8\pi a} \quad (18)$$

In base all'ultima relazione si ottiene infine:

$$\frac{1}{2} \left(i - \frac{i'}{3} \right) = \frac{i}{8} \Rightarrow i - \frac{i'}{4} = \frac{3i}{4} = \frac{i'}{3} \Rightarrow i' = \frac{9}{4} i \quad (19)$$

2) Per il calcolo del campo \vec{B}_{tot} in un punto generico $Q(x,y)$ del piano $z=0$ è utile riferirsi agli angoli θ_1 e θ_2 definiti nella Figura a fianco, ricordando che i campi prodotti da dei fili indefiniti hanno linee di forza circolari attorno al filo; pertanto nel punto Q sono diretti ortogonalmente ai raggi vettori uscenti dai fili e diretti verso il punto Q stesso.

La definizione dei versori $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, in base alla Figura e ricordando che essi sono per definizione ortogonali a \hat{r}_1 e \hat{r}_2 , è:



$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = -\hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1 \\ \hat{\theta}_2 = -\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{y} \sin \theta_2 \end{cases} \quad (20)$$

dove:

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{y-2a}{r_1} = \frac{y-2a}{\sqrt{x^2+(y-2a)^2}} & \sin \theta_1 = \frac{x}{r_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-2a)^2}} \\ \cos \theta_2 = \frac{y+2a}{r_2} = \frac{y+2a}{\sqrt{x^2+(y+2a)^2}} & \sin \theta_2 = \frac{x}{r_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+(y+2a)^2}} \end{cases} \quad (21)$$

Poiché il campo $\vec{B}(x,y)$ è diretto come $\hat{\theta}_1$ ed il campo $\vec{B}'(x,y)$ è diretto come $\hat{\theta}_2$ si ha:

$$\begin{cases} \vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\hat{\theta}_1}{r_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1}{r_1} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x}(y-2a) + \hat{y}x}{r_1^2} \right] = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x}(y-2a) + \hat{y}x}{x^2+(y-2a)^2} \right] \\ \vec{B}'(x,y) = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \frac{\hat{\theta}_2}{r_2} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{y} \sin \theta_2}{r_2} \right] = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x}(y+2a) + \hat{y}x}{r_2^2} \right] = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \left[\frac{-\hat{x}(y+2a) + \hat{y}x}{x^2+(y+2a)^2} \right] \end{cases} \quad (22)$$

Il campo risultante è dunque:

$$\vec{B}_{tot}(x, y) = \vec{B}(x, y) + \vec{B}'(x, y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left\{ \left[\frac{-\hat{x}(y-2a) + \hat{y}x}{x^2 + (y-2a)^2} \right] + \frac{9}{4} \left[\frac{-\hat{x}(y+2a) + \hat{y}x}{x^2 + (y+2a)^2} \right] \right\} \quad (23)$$

Riordinando i termini e separando le componenti si ottiene infine:

$$\vec{B}_{tot}(x, y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left\{ \hat{x} \left[\frac{(2a-y)}{(x^2 + (y-2a)^2)} - \frac{9}{4} \frac{(y+2a)}{(x^2 + (y+2a)^2)} \right] + \hat{y}x \left[\frac{1}{(x^2 + (y-2a)^2)} + \frac{9}{4} \frac{1}{(x^2 + (y+2a)^2)} \right] \right\} \quad (24)$$

3) La parentesi quadra della componente \hat{y} è formata dalla somma di due termini, entrambi per definizione non negativi e che non possono essere simultaneamente nulli; pertanto la componente \hat{y} può essere zero solo se $x = 0$ e quindi se esistono punti in cui $\vec{B}_{tot}(x, y) = 0$ essi devono appartenere all'asse y . Notiamo inoltre che, essendo le correnti i e i' concordi, nei punti dell'asse y con $y < -2a$ o $y > 2a$ i due termini hanno lo stesso segno (rispettivamente entrambi positivi ed entrambi negativi), per cui gli eventuali punti in cui il campo risultante è nullo devono appartenere al segmento $-2a < y < 2a$, in cui i termini sono discordi. Sostituendo queste condizioni nella (24) ed imponendo l'annullamento anche della componente \hat{x} si ha:

$$\vec{B}_{tot}(0, y) = \hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{(2a-y)}{((y-2a)^2)} - \frac{9}{4} \frac{(y+2a)}{((y+2a)^2)} \right] = \hat{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{1}{(2a-y)} - \frac{9}{4} \frac{1}{(y+2a)} \right] \quad (25)$$

La parentesi quadra si annulla se:

$$\frac{1}{(2a-y)} = \frac{9}{4} \frac{1}{(y+2a)} \Rightarrow 4(y+2a) = 9(2a-y) \Rightarrow 13y = 10a \Rightarrow y = \frac{10}{13}a \quad (26)$$

Esiste dunque un solo punto in cui $\vec{B}_{tot}(x, y, 0) = 0$ ed ha coordinate $(0, (10/13)a, 0)$.

4) Esistono infinite coppie di percorsi chiusi passanti per C e D per cui gli integrali di circuitazione del campo di induzione magnetica sono diversi. Basti osservare che lungo un percorso che include la sola corrente i la circuitazione di \vec{B}_{tot} vale $\mu_0 i$, lungo un percorso che include la sola corrente i' vale $\mu_0 i' = (9/4)\mu_0 i$, lungo un percorso che le include entrambi vale $\mu_0(i + i') = (13/4)\mu_0 i$ e lungo un percorso che non ne include nessuna vale 0. Ad esempio possiamo scegliere i percorsi rosso e blu in Figura: lungo il percorso rosso la circuitazione è nulla, mentre lungo il percorso blu vale $\mu_0 i$.

