Soluzione compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 13 Gennaio 2017

Esercizio 1

1) La lamina è in quiete, per cui possiamo scrivere la prima equazione cardinale per la lamina nella forma:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0 \quad \Rightarrow \vec{R}_A = -M\vec{g} - \vec{R}_B \tag{1}$$

Possiamo poi scrivere la seconda equazione cardinale utilizzando come polo il perno O: la reazione $\vec{R}_A$ è applicata nel perno, per cui non ha momento, mentre la reazione $\vec{R}_B$ e la forza peso hanno momenti che devono essere eguali ed opposti, visto che la lamina non ruota. Introducendo un asse z di rotazione ortogonale al piano della lamina si ha:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{R}_{P\to CM} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{R}_B = 0 = \hat{z}\left(-\frac{L}{2}Mg + \frac{2L}{3}R_B\right) \quad \Rightarrow R_B = \frac{3Mg}{4} \tag{2}$$

Tornando alla forma vettoriale si ha quindi:

$$\vec{R}_B = -\frac{3M\vec{g}}{4} \quad \Rightarrow \vec{R}_A = -M\vec{g} - \vec{R}_B = -M\vec{g} - \left(-\frac{3M\vec{g}}{4}\right) = -\frac{M\vec{g}}{4} \tag{3}$$

Numericamente:

$$R_B = \frac{3}{4} \times 2 \times 9.8\ \text{N} = 14.7\ \text{N}; \quad R_A = \frac{1}{4} \times 2 \times 9.8\ \text{N} = 4.9\ \text{N} \tag{4}$$

2) La quantità di moto totale NON SI CONSERVA, perché il perno esercita durante l'urto una forza impulsiva. L'energia meccanica NON SI CONSERVA, perché le forze interne del sistema proiettile + lamina fanno lavoro. Il momento angolare totale rispetto al perno SI CONSERVA, perché le forze che hanno momento rispetto al perno non sono impulsive: la gravità notoriamente non lo è e nemmeno la reazione $\vec{R}_B$ lo è, in quanto il vincolo B è un puro appoggio, che impedisce alla lamina di precipitare, ma non ne limita il moto tranne che verso il basso.

3) In base al risultato del punto 2) la legge di conservazione da applicare è chiaramente quella del momento angolare. Prima dell'urto, poiché la lamina è ferma, il momento angolare è dovuto solo al proiettile e, chiamando C il punto d'impatto sul bordo della lamina, è dato da:

$$\vec{L}_{in} = m\vec{R}_{P\to C} \wedge \vec{V}_0 = -\hat{z}\,\frac{M}{2}LV_0 \tag{5}$$

Dopo l'urto il sistema ruota rigidamente intorno al perno P, per cui può essere scritto nella forma:

$$\vec{L}_{fin} = I_{tot,P}\vec{\omega} = \left(I_{M,P} + I_{m,P}\right)\vec{\omega} = \left(I_{M,CM} + MR^2_{P\to CM} + mR^2_{m\to P}\right)\vec{\omega} \tag{6}$$

dove è stato applicato il teorema di Steiner per determinare il momento d'inerzia della lamina rispetto al punto P, conoscendo quello rispetto al CM. Il momento d'inerzia globale è quindi:

$$I_{tot,P} = \left(I_{M,CM} + MR^2_{P\to CM} + mR^2_{m\to P}\right) = \frac{ML^2}{6} + M\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(L\sqrt{2}\right)^2 = ML^2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{5}{3}ML^2 \tag{7}$$

Pertanto:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_{in}}{I_{tot,P}} = -\hat{z}\frac{MLV_0}{2}\frac{1}{\frac{5}{3}ML^2} = -\hat{z}\frac{3V_0}{10L} = -1.5 \text{ rad/s } \hat{z} \tag{8}$$

4) Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica. La lamina con il proiettile conficcato si ribalta se il CM del sistema lamina + proiettile riesce a giungere sulla verticale del perno P. Poiché la posizione in cui è conficcato il proiettile, cioè il punto C, il perno ed il CM della lamina sono allineati (giacciono tutti e tre sulla diagonale $P \to C$), anche il CM del sistema è allineato con questa terna di punti, per cui è sufficiente richiedere che sia il punto C che il CM della lamina giungano sulla verticale di P.
Subito dopo l'urto il CM della lamina si trova ad una quota $h_{CM} = L/2$ rispetto al piano d'appoggio ed il proiettile ad una quota $h_m = L$. Nel punto più alto della traiettoria di rotazione il CM della lamina raggiunge una quota $h'_{CM} = \left(L\sqrt{2}\right)/2$ ed il proiettile una quota $h'_m = L\sqrt{2}$. I valori dell'energia potenziale nell'istante immediatamente successivo all'urto U_{in} e nell'istante in cui si raggiunge la quota massima U_{fin} sono quindi:

$$U_{in} = Mg\frac{L}{2} + mgL = Mg\frac{L}{2} + \frac{M}{2}gL = MgL; \quad U_{fin} = Mg\frac{L\sqrt{2}}{2} + mgL\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(Mg\frac{L}{2} + mgL\right) = \sqrt{2}MgL = \sqrt{2}U_{in} \tag{9}$$

Nell'istante successivo all'urto l'energia cinetica K_{in} è data dalla rotazione rigida del sistema lamina + proiettile intorno all'asse passante per P, per cui:

$$K_{in} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 = \frac{5}{6}ML^2\omega^2 \tag{10}$$

Siccome per ottenere il ribaltamento della lamina è sufficiente giungere all'apice della traiettoria con velocità nulla, l'energia cinetica alla quota massima K_{fin} può essere scelta eguale a zero; in questo modo si deduce automaticamente la velocità minima necessaria per produrre il ribaltamento. Applicando la conservazione dell'energia si ha:

$$E_{in} = U_{in} + K_{in} = MgL + \frac{5}{6}ML^2\omega^2 = E_{fin} = K_{fin} + U_{fin} = 0 + \sqrt{2}MgL$$

da cui infine:

$$\frac{5}{6}ML^2\omega^2 = \frac{5}{6}ML^2 \times \frac{9}{100}\frac{V_0^2}{L^2} = \frac{3}{40}MV_0^2 = MgL\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \Longrightarrow V_0^2 = \frac{40}{3}gL\left(\sqrt{2}-1\right) \tag{11}$$

Il valore minimo della velocità è quindi:

$$V_0 = \sqrt{\frac{40}{3}gL\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{\frac{40}{3} \times 9.8 \times 1 \times \left(\sqrt{2}-1\right)} \text{ m/s} = 7.36 \text{ m/s}$$

per cui la velocità di 5 m/s fornita nel testo non è sufficiente a far ribaltare la lamina.

Esercizio 2

1) Applicando la legge di Gauss ad un cilindro coassiale con i due cilindri reali e di raggio $(r > b)$ si ricava il campo elettrico all'esterno della superficie metallica di raggio b:

$$\vec{E}(r > b) = \left(\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma 2\pi b}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\hat{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}(\lambda_0 + \sigma 2\pi b)\hat{r} \tag{12}$$

dove $\hat{r}$ è il versore delle coordinate cilindriche e r è la distanza dall'asse. Si ha quindi:

$$\left|\vec{E}(r=2b)\right| = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 2b}(\lambda_0 + \sigma 2\pi b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}(\lambda_0 + \sigma 2\pi b) = \frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 b} \;\Longrightarrow \lambda_0 + \sigma 2\pi b = \frac{\lambda_0}{2} \Longrightarrow \sigma = -\frac{\lambda_0}{4\pi b} \quad (13)$$

2) Il campo elettrico nella regione $r > b$ è scritto nella (12), in cui sostituendo il valore di σ l'espressione $(\lambda_0 + \sigma 2\pi b)$ viene rimpiazzata da $\lambda_0/2$. Nella regione $r < a$ il campo elettrico è ovviamente nullo, mentre nella regione $a < r < b$ possiamo utilizzare l'espressione valida per un filo infinito uniformemente carico, dato che per ipotesi $L \gg a, b$. Si ottiene quindi:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & a < r < b \\ \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > b \end{cases} \quad (14)$$

Le discontinuità in $r = a$ e $r = b$ sono dovute chiaramente alla presenza delle cariche libere su queste superfici. La differenza di potenziale fra i due cilindri è:

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}(a < r < b) \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (15)$$

3) Quando le due superfici vengono collegate si produce un moto di carica dalla superficie a potenziale più alto (quella interna) verso la superficie a potenziale più basso (quella esterna), per cui la carica sulla superficie interna tende a diminuire e quella sulla superficie esterna ad aumentare. La condizione di equilibrio, in cui il moto di carica cessa, si raggiunge quando i due conduttori sono equipotenziali, per cui il campo elettrico fra a e b è nullo. Poiché nella regione $a < r < b$ il campo elettrico è proporzionale alla carica sulla superficie di raggio a (vd. (14)), esso si annulla solo se questa carica diventa zero, per cui tutta la carica sul cilindro interno migra su quello esterno. All'equilibrio quindi:

$$\lambda_a(t = \infty) = 0 \quad \sigma_b(t = \infty) = \sigma + \frac{\lambda_0}{2\pi b} = -\frac{\lambda_0}{4\pi b} + \frac{\lambda_0}{2\pi b} = +\frac{\lambda_0}{4\pi b} \quad (16)$$

Il campo elettrico diventa perciò:

$$\vec{E}(r, t = \infty) = \begin{cases} 0 & r < a \\ 0 & a < r < b \\ \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > b \end{cases} \quad (17)$$

Si noti che $\vec{E}(r > b)$ è rimasto invariato, come prevedibile visto che rispetto al caso precedente la carica sulla superficie interna si è solo spostata sulla superficie esterna, senza alterare né la simmetria del problema né la carica totale.

4) L'evoluzione temporale delle cariche del sistema si studia applicando le leggi di Kirchoff al ramo formato dai bordi dei due conduttori e dal resistore R. Pertanto, definendo positivo il segno della corrente I che fa diminuire la carica sulla sfera interna, si ha:

$$\begin{cases} V_a - V_b - RI = 0 \\ I = -\frac{dQ_a}{dt} = -L\frac{d\lambda_a}{dt} \end{cases} \quad (18)$$

L'espressione della differenza di potenziale $(V_a - V_b)$ è l'opposto della (15), con l'accortezza di sostituire il valore fisso di λ con la funzione del tempo $\lambda_a(t)$, in quanto per la legge di Gauss il flusso del campo elettrico nella regione fra le due superfici dipende solo dalla carica su quella interna. L'equazione del circuito diventa quindi:

$$V(a) - V(b) = \frac{\lambda_a(t)}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = RI = -RL\frac{d\lambda_a(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \frac{d\lambda_a(t)}{dt} = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\lambda_a(t)}{2\pi\varepsilon_0 LR} \tag{19}$$

la cui soluzione è:

$$\lambda_a(t) = \lambda_a(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{20}$$

con

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 LR}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{21}$$

L'andamento temporale di $\sigma_b(t)$ si ottiene infine generalizzando la relazione (13):

$$\lambda_a(t) + \sigma 2\pi b = \frac{\lambda_0}{2} \qquad \Longrightarrow \lambda_a(t) + \sigma_b(t)2\pi b = \frac{\lambda_0}{2} \qquad \Longrightarrow \sigma_b(t) = \frac{1}{2\pi b}\left(\frac{\lambda_0}{2} - \lambda_a(t)\right) \tag{22}$$

Sostituendo la (20) nella (22) si ha quindi:

$$\sigma_b(t) = \frac{1}{2\pi b}\left(\frac{\lambda_0}{2} - \lambda_a(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = \frac{\lambda_0}{4\pi b}\left(1 - 2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \tag{23}$$