Soluzione compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 14 Settembre 2016

Esercizio 1

1) La quantità di moto totale NON si conserva, perché il manubrio è soggetto alla forza (esterna) di gravità.
Il momento angolare totale rispetto al C.M. SI CONSERVA in quanto l'unica forza esterna presente è la gravità che è applicata nel C.M. per cui ha braccio nullo (si noti che ciò non sarebbe stato vero se la resistenza dell'aria non fosse stata trascurabile).
L'energia cinetica NON SI CONSERVA perché la forza di gravità fa lavoro sul manubrio (ovvero perché l'energia potenziale del manubrio cambia con la quota).
L'energia meccanica SI CONSERVA perché il sistema non è soggetto a forze dissipative.
2) Per quanto osservato nel punto 1) possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica; pertanto, essendo nulla la quota iniziale del C.M., si ha:

$$E_{in} = U_{in} + K_{in} = \frac{1}{2}\,(m+M)V_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = U_f + K_f = (m+M)gh_{max} + \frac{1}{2}\,(m+M)V_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$

dove I è il momento d'inerzia del manubrio. Notiamo innanzitutto che, poiché la velocità angolare del manubrio non cambia, il termine $\frac{1}{2}I\omega^2$ rimane invariato, per cui può essere semplificato e non contribuisce al bilancio energetico. Nel punto più alto della traiettoria la velocità del C.M. non è nulla, in quanto lungo l'asse x non sono presenti forze ed il moto è rettilineo uniforme $\Longrightarrow \vec{V}_f = \hat{x}V_{0,x} = \hat{x}V_0\cos 45^{\text{O}} = \hat{x}V_0\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Quindi:

$$h_{max} = \frac{\left(V_0^2 - V_f^2\right)}{2g} = \frac{\left(V_0^2 - \frac{V_0^2}{2}\right)}{2g} = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{100}{4\times 9.8}\ \text{m} = 2.55\ \text{m} \qquad (2)$$

3) La rottura del manubrio è causata da forze interne, per cui il moto del C.M. non viene modificato. Prima della frattura il C.M. aveva percorso l'arco ascendente di una parabola, per cui dopo la frattura percorre l'arco discendente della parabola stessa. Le leggi orarie delle sue coordinate, tenendo conto dell'angolo di lancio iniziale $\left(45^{\text{O}}\right)$, sono:

$$\begin{cases} x_{CM} = V_0\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y_{CM} = V_0\frac{\sqrt{2}}{2}t - g\frac{t^2}{2} \end{cases} \qquad (3)$$

Combinando le (3) si ottiene l'equazione della traiettoria:

$$y_{CM} = x_{CM} - \frac{g x_{CM}^2}{V_0^2} \qquad (4)$$

Il vertice di questa parabola (corrispondente a $y = h_{max}$) si ottiene imponendo che la derivata della (4) sia nulla nel punto $x_{CM} = x_V$:

$$\left.\frac{dy_{CM}}{dx_{CM}}\right|_{x_{CM}=x_V} = 1 - \frac{2gx_V}{V_0^2} = 0 \qquad \Longrightarrow x_V = \frac{V_0^2}{2g} = 5.1\ \text{m} \qquad (5)$$

Il punto x_V è raggiunto nell'istante t_V tale che:

$$x_V = V_0\frac{\sqrt{2}}{2}t_V \Longrightarrow t_V = \frac{2x_V}{V_0\sqrt{2}} = \frac{2V_0^2}{2gV_0\sqrt{2}} = \frac{V_0}{g\sqrt{2}} = \frac{10}{9.8\times\sqrt{2}}\ \text{s} = 0.72\ \text{s} \qquad (6)$$

Poiché la variazione di energia dovuta al processo di rottura è trascurabile, le velocità delle due sfere prima e dopo la rottura rimangono le stesse. Seguendo la figura del testo, la velocità $\vec{V}_{r,m}$ nel riferimento del C.M. è rivolta verso l'asse negativo x e la velocità $\vec{V}_{r,M}$ verso l'asse positivo x. Per trasformare al riferimento solidale con il suolo bisogna quindi sommare vettorialmente a queste due velocità la velocità del C.M., che nell'istante della rottura è anch'essa orizzontale, visto che il manubrio ha raggiunto la quota massima. Il moto delle due sfere rispetto al C.M. è una rotazione a velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ e raggio pari alla distanza di ciascuna di esse dal C.M.; poiché $M = 3m$, il C.M. si trova ad una distanza da m tripla di quella da M, per cui $\vec{r}_{C.M.\to m} = +\frac{3}{4}\omega L\hat{y}$ e $\vec{r}_{C.M.\to M} = -\frac{1}{4}\omega L\hat{y}$. Le velocità delle due sfere nel sistema di riferimento relativo al suolo sono quindi:

$$\begin{cases} \vec{V}_m = \vec{V}_{r,m} + \vec{V}_{C.M.} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{C.M.\to m} + V_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} = \hat{x}\left(V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\omega L\right) \\ \vec{V}_M = \vec{V}_{r,M} + \vec{V}_{C.M.} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{C.M.\to M} + V_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} = \hat{x}\left(V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\omega L\right) \end{cases} \tag{7}$$

Entrambe queste velocità sono, come affermato nel testo, dirette lungo l'asse x e poiché il sistema non è soggetto a forze lungo quest'asse, le componenti x delle due velocità non cambieranno durante il moto.
Nell'istante della rottura le due sfere si trovano a quote diverse, rispettivamente:

$$\begin{cases} h_m(t_V) = h_{max} + |\vec{r}_{C.M.\to m}| = \frac{V_0^2}{4g} + \frac{3}{4}L \\ h_M(t_V) = h_{max} - |\vec{r}_{C.M.\to M}| = \frac{V_0^2}{4g} - \frac{1}{4}L \end{cases} \tag{8}$$

Le equazioni del moto delle due sfere lungo l'asse y durante la fase successiva alla rottura sono quindi:

$$\begin{cases} h_m(t > t_V) = \frac{V_0^2}{4g} + \frac{3L}{4} - \frac{1}{2}g(t - t_V)^2 \\ h_M(t > t_V) = \frac{V_0^2}{4g} - \frac{L}{4} - \frac{1}{2}g(t - t_V)^2 \end{cases} \tag{9}$$

Dalle (9) si ricavano gli istanti in cui le sfere toccano terra, imponendo che le loro quote siano nulle:

$$\begin{cases} (t_m - t_V)^2 = \frac{2}{g}\left(\frac{V_0^2}{4g} + \frac{3L}{4}\right) = \frac{V_0^2}{2g^2}\left(1 + \frac{3Lg}{V_0^2}\right) \Rightarrow t_m = t_V + \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{3Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3Lg}{V_0^2}}\right) \\ (t_M - t_V)^2 = \frac{2}{g}\left(\frac{V_0^2}{4g} - \frac{L}{4}\right) = \frac{V_0^2}{2g^2}\left(1 - \frac{Lg}{V_0^2}\right) \Rightarrow t_M = t_V + \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Lg}{V_0^2}}\right) \end{cases} \tag{10}$$

Notiamo che $t_M < 2t_V < t_m$ come prevedibile. Sostituendo i valori numerici si ottiene: $t_m = 1.54$ s e $t_M = 1.40$ s. I punti in cui le due sfere toccano terra si ottengono ricordando che dopo la rottura il loro moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme con le velocità (7). Le leggi del moto lungo l'asse x sono quindi:

$$\begin{cases} x_m(t > t_V) = x_V + V_m(t - t_V) = \frac{V_0^2}{2g} + \left(V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\omega L\right)\left(t - \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\right) \\ x_M(t > t_V) = x_V + V_M(t - t_V) = \frac{V_0^2}{2g} + \left(V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\omega L\right)\left(t - \frac{V_0}{g\sqrt{2}}\right) \end{cases} \tag{11}$$

In particolare, sostituendo nelle (11) gli istanti finali t_m e t_M si ottiene:

$$\begin{cases} x_{f,m} = \frac{V_0^2}{2g} + \left(V_0\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\omega L\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}g}\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0^2}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}}\right) - \frac{3}{4}\frac{\omega L V_0}{\sqrt{2}g}\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}} = 9.67\ \mathrm{m} \\ x_{f,M} = \frac{V_0^2}{2g} + \left(V_0\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\omega L\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}g}\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0^2}{2g}\left(1+\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}}\right) + \frac{1}{4}\frac{\omega L V_0}{\sqrt{2}g}\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}} = 10.29\ \mathrm{m} \end{cases} \tag{12}$$

Si noti come, a causa della riduzione della sua velocità orizzontale per effetto della rotazione, la massa m percorra un tratto minore della massa M anche se inizia il tratto di caduta da una quota più alta.

4) Le componenti orizzontali delle velocità delle due sfere, come più volte osservato, non cambiano, per cui è sufficiente calcolare le componenti verticali negli istanti in cui le sfere giungono a terra. Il moto in direzione verticale è per entrambe le sfere uniformemente accelerato, con accelerazione $\vec{g}$, per cui:

$$\begin{cases} V_{m,y}(t_m) = -g(t_m - t_V) = -g\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}g}\left(1+\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}}\right) - \frac{V_0}{\sqrt{2}g}\right) = -\frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}} \\ V_{M,y}(t_M) = -g(t_M - t_V) = -g\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}g}\left(1+\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}}\right) - \frac{V_0}{\sqrt{2}g}\right) = -\frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}} \end{cases} \tag{13}$$

In definitiva quindi:

$$\begin{cases} \vec{V}_m(t_m) = \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\omega L, -\frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}}\right) = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{3\sqrt{2}\omega L}{4V_0}, -\sqrt{1+\frac{3Lg}{V_0^2}}\right) = (5.57, -8.04)\ \mathrm{m/s} \\ \vec{V}_M(t_M) = \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\omega L, -\frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}}\right) = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}\omega L}{4V_0}, -\sqrt{1-\frac{Lg}{V_0^2}}\right) = (7.57, -6.72)\ \mathrm{m/s} \end{cases} \tag{14}$$

Esercizio 2

1) Il campo elettrico prodotto da un anello carico di raggio a in un punto P lungo il suo asse è:

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{(\vec{x}^2 + a^2)^{3/2}} \tag{15}$$

dove $\vec{x}$ è il vettore posizione del punto P misurato dal centro dell'anello. Nel caso dei due anelli del problema il vettore $\vec{x}$ vale $(z-b)\hat{z}$ per l'anello nel piano $z = b$ e $(z+b)\hat{z}$ per l'anello nel piano $z = -b$; detti quindi rispettivamente $\vec{E}_+$ ed $\vec{E}_-$ i campi elettrici prodotti dai due anelli, il campo elettrico risultante nel punto P si ottiene applicando il principio di sovrapposizione:

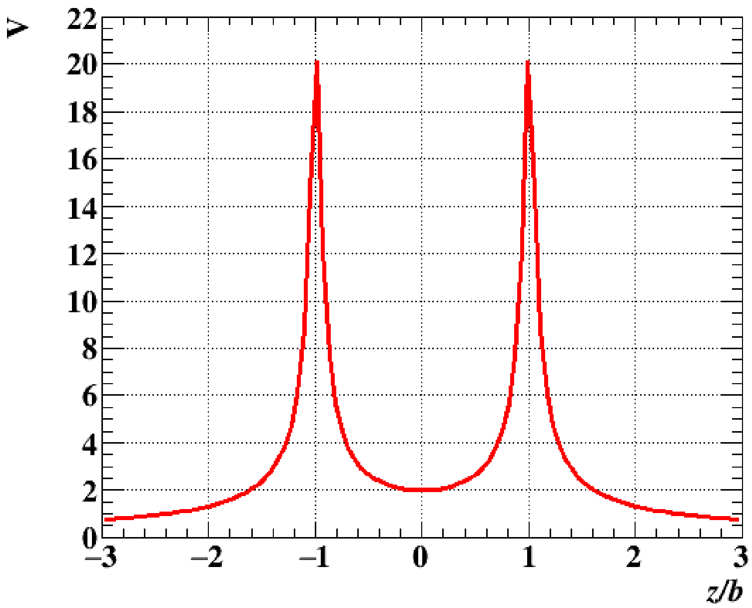
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\hat{z}\left[\frac{(z-b)}{((z-b)^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{(z+b)}{((z+b)^2 + a^2)^{3/2}}\right] \tag{16}$$

Il campo elettrico va a zero da valori negativi per $z \to -\infty$ e da valori positivi per $z \to +\infty$ perché i due termini si comportano come $z/(z^2 \mp 2zb)^{3/2}$, cioè convergono a zero come $1/z^2$ conservando il segno di z. Notiamo inoltre che il campo elettrico è una funzione dispari di z e che il primo addendo cambia segno attraversando il piano $(z = b)$ ed il secondo attraversando il piano $(z = -b)$.

2) Per determinare il potenziale si può naturalmente procedere per integrazione del campo elettrico cambiato di segno con la condizione $V(z = \pm\infty) = 0$ oppure, più semplicemente, applicare il principio di sovrapposizione utilizzando i potenziali generati individualmente dai due anelli. È necessario solo ricordarsi, come nel punto 1), che gli anelli non si trovano nell'origine degli assi e che quindi occorre sottrarre alla coordinata del punto in cui si calcola il potenziale (secondo la ben nota formula del potenziale di un anello) la coordinata del centro dell'anello che genera tale potenziale. In definitiva, con una notazione analoga a quello del punto 1):

$$V(z) = V_+(z) + V_-(z) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-b)^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+b)^2+a^2}}\right] \tag{17}$$

Il potenziale è ovviamente una funzione pari di z. Inoltre il primo termine ha un massimo in $z = b$, mentre il secondo lo ha in $z = -b$. Poiché per ipotesi $b \gg a$, in corrispondenza di $z = b$ il primo termine è molto più grande del secondo, mentre in $z = -b$ si verifica la situazione opposta. In definitiva quindi $z = \pm b$ sono i punti di massimo dell'intera funzione $V(z)$, di cui possiamo tracciare un grafico approssimativo come in Figura (in questo caso si è scelto $b = 20a$).



3) Il potenziale in $z = 0$ è:

$$V(0) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\right] = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0\sqrt{b^2+a^2}} \approx \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 b}$$

Nella regione delle z positive, come discusso in precedenza, il potenziale ha un punto di massimo in corrispondenza dell'anello posto nel piano $z = b$. La carica raggiunge il centro di questo anello se la sua energia cinetica iniziale è maggiore del lavoro repulsivo compiuto dal campo elettrico fra $z = 0$ e $z = b$, ovvero se

$$\frac{m}{2}V_0^2 \geq q\big(V(b) - V(0)\big) = q\left[\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{(2b)^2+a^2}}\right) - \frac{\lambda a}{\varepsilon_0\sqrt{b^2+a^2}}\right] \approx \frac{q\lambda}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{b}\right) \approx \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0} \tag{18}$$

La condizione per cui la carica raggiunge l'anello è quindi:

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{q\lambda}{m\varepsilon_0}} \tag{19}$$

In questo caso, immediatamente dopo aver superato l'anello in $z = b$, la carica è soggetta a due forze elettrostatiche, concordi e repulsive nella direzione dell'asse z positivo, per cui si allontana a distanza infinita dai due anelli. Se invece la condizione (19) non è verificata la carica rimane intrappolata nella regione fra i due anelli, per cui compie un moto limitato, periodico e non armonico.

4) Il campo di induzione magnetica prodotto dai due anelli in rotazione sarebbe equivalente a quello di due spire percorse da corrente, che sull'asse delle spire è diretto come l'asse stesso, cioè lungo z. Poiché la velocità della carica è anch'essa sempre lungo z per ipotesi, la forza di Lorentz sulla carica sarebbe nulla.