Soluzione compito Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 22 Luglio 2016

Esercizio 1

1) Le forze agenti sul corpo sono la forza peso in direzione verticale e la reazione del piano $\vec{T}$, ortogonale ad esso. L'equazione del moto nel sistema non inerziale è

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{A}$$

Con gli assi cartesiani scelti:

$$\vec{g} = g(\hat{x}\sin\theta - \hat{y}\cos\theta); \qquad \vec{a}' = \ddot{x}\hat{x} = \hat{x}(g+A)\sin\theta\,; \qquad \vec{T} = \hat{y}m(g+A)\cos\theta$$

Inoltre, essendo $\vec{A}$ diretto verticalmente verso l'alto (opposto a $\vec{g}$):

$$\vec{A} = -\hat{x}A\sin\theta + \hat{y}A\cos\theta$$

2) Il piano è lungo $l = h/\sin\theta$ ed è percorso di moto uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a}'$. Pertanto:

$$l = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2}a' t_f^2 = \frac{1}{2}(g+A)\sin\theta\, t_f^2 \implies t_f = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g+A}}; \quad V_f' = a' t_f = \sqrt{2h(g+A)}; \quad K_f' = mh(g+A)$$

3) L'accelerazione nel sistema di riferimento inerziale è la somma dell'accelerazione nel sistema di riferimento non inerziale e dell'accelerazione di trascinamento, per cui:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} = \hat{x}(g+A)\sin\theta - A\sin\theta\,\hat{x} + A\cos\theta\,\hat{y} = g\sin\theta\,\hat{x} + A\cos\theta\,\hat{y}$$

La velocità nell'istante t_f è quindi:

$$\vec{V}_f = \vec{a}t_f = (g\sin\theta\,\hat{x} + A\cos\theta\,\hat{y})\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g+A}} \Longrightarrow K_f = \frac{1}{2}mV_f^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2h}{g+A}\right)\frac{(g^2\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{mh}{g+A}(g^2 + A^2\cot^2\theta)$$

4) **Domanda difficile.**

Nel sistema non inerziale la forza apparente $-m\vec{A}$ compie lavoro e tale lavoro è:

$$L_{\vec{F}_{app}} = \int -m\vec{A}\cdot d\vec{l} = +mAh$$

che è proprio il termine da aggiungere alla differenza di energia potenziale mgh per ottenere K_f'.

Nel sistema inerziale il calcolo è più elaborato, perché la velocità della massa m non è parallela al piano inclinato, per cui la reazione vincolare compie lavoro su di essa ed il lavoro della forza di gravità non è banalmente mgh, in quanto l'ascensore è in salita. Calcoliamo le potenze della reazione vincolare e della forza peso:

$$\begin{cases} P_{\vec{T}} = \vec{T}\cdot\vec{V} = m(g+A)\cos\theta\,\hat{y}\cdot\vec{a}t = mA(g+A)\cos^2\theta\, t \\ P_{m\vec{g}} = m\vec{g}\cdot\vec{V} = m(g\sin\theta\,\hat{x} - g\cos\theta\,\hat{y})\cdot\vec{a}t = m(g^2\sin^2\theta - Ag\cos^2\theta)t \end{cases}$$

La potenza totale è quindi:

$$P = mt(Ag\cos^2\theta + A^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta - Ag\cos^2\theta) \;\; \Rightarrow L = \int_0^{t_f} Pdt = m\frac{t_f^2}{2}(g^2\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)$$

$$= \frac{m}{2}\frac{2h}{(g+A)}\frac{(g^2\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{mh}{(g+A)}(g^2 + A^2\cot^2\theta) = K_f$$

Si noti che la reazione vincolare fa lavoro <u>sia sul blocco che sul piano</u>, con segni opposti a causa del principio di azione e reazione. Pertanto il suo lavoro globale è nullo.

Esercizio 2

1) Per simmetria il campo elettrico è diretto lungo l'asse $\hat{x}$ ed è la combinazione, secondo il principio di sovrapposizione, dei campi generati individualmente dalle due piastre cariche, tenendo conto della presenza del dielettrico che riduce l'intensità dei campi di un fattore ε_r.

Il campo $\vec{E}_+$ dovuto alla piastra positiva è:

$$\vec{E}_+ = E_x\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x} & x < -a \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x} & x > -a \end{cases}$$

mentre il campo $\vec{E}_-$ dovuto alla piastra negativa è:

$$\vec{E}_- = E_x\hat{x} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x} & x < +a \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x} & x > +a \end{cases}$$

Combinando i due campi si ottiene quindi:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = E_x\hat{x} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{x} & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

2) Le due distribuzioni di carica in moto sono assimilabili a due piani infiniti, percorsi da correnti in verso opposto, con una corrente per unità di lunghezza di valore

$$i = \frac{dI}{dl} = \frac{d^2q}{dldt} = \sigma\frac{d^2A}{dldt} = \pm\sigma V_z$$

dove A è un elemento di superficie sui due piani ed il segno superiore vale per il piano posto in $x = -a$. Applicando la nota formula per il campo di induzione magnetica generato da un piano infinito di corrente, ortogonale all'asse $\hat{x}$ e con la corrente diretta nel verso positivo dell'asse $\hat{z}$ si ottiene il campo $\vec{B}_+$ generato dalla piastra caricata positivamente:

$$\vec{B}_+ = B_y\hat{y} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0\sigma V_z}{2}\hat{y} & x < -a \\ +\dfrac{\mu_0\sigma V_z}{2}\hat{y} & x > -a \end{cases}$$

Analogamente, notando che la corrente nel piano posto in $x = +a$ è diretta nel verso negativo dell'asse $\hat{z}$ si ottiene:

$$\vec{B}_- = B_y\hat{y} = \begin{cases} +\dfrac{\mu_0\sigma V_z}{2}\hat{y} & x < +a \\ -\dfrac{\mu_0\sigma V_z}{2}\hat{y} & x > +a \end{cases}$$

Applicando il principio di sovrapposizione si ricava infine:

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_- = B_y \hat{y} = \begin{cases} +\mu_0 \sigma V_z \hat{y} & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

3) Per fissare le idee, senza perdita di generalità a parte il verso della forza, consideriamo le forze elettrica e magnetica sul piano caricato negativamente, posto in $x = a$. La forza elettrica per unità di superficie su un piano dovuta all'attrazione dell'altro è il prodotto della carica per unità di superficie per il campo elettrico medio nella posizione del piano stesso. Poiché il campo $\vec{E}$ è diverso da zero fra le lastre e nullo all'esterno si può scrivere:

$$\frac{d\vec{F}_{el}}{dA} = -\sigma \langle \vec{E}(x = a) \rangle = -\sigma \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} + 0\right)\hat{x} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}\hat{x}$$

La forza magnetica per unità di superficie su un piano è dovuta all'interazione di Laplace fra la corrente superficiale su tale piano ed il campo di induzione magnetica presente nella posizione del piano. Poiché la corrente per unità di lunghezza sul piano caricato negativamente è $-\sigma V_z$, la forza magnetica per unità di superficie è su questo piano è:

$$\frac{d\vec{F}_{magn}}{dA} = -\sigma V_z \hat{z} \wedge \langle \vec{B}(x = a) \rangle = -\sigma V_z \hat{z} \wedge \left[\frac{1}{2}(\mu_0 \sigma V_z + 0)\right]\hat{y} = +\frac{\mu_0 \sigma^2 V_z^2}{2}\hat{x}$$

Le due forze hanno versi opposti, come prevedibile visto che cariche opposte si attraggono ($-\hat{x}$ sulla forza elettrica corrisponde ad una forza che spinge la piastra caricata negativamente verso quella caricata positivamente) e correnti discordi si respingono ($+\hat{x}$ sulla forza magnetica corrisponde ad una forza che allontana la piastra caricata negativamente da quella caricata positivamente).

4) Le piastre si attraggono se la forza elettrica per unità di superficie è maggiore in modulo di quella magnetica. Pertanto:

$$\left|\frac{d\vec{F}_{el}}{dA}\right| = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} > \left|\frac{d\vec{F}_{magn}}{dA}\right| = \frac{\mu_0 \sigma^2 V_z^2}{2} \qquad \Rightarrow V_z^2 < \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{c^2}{n^2} \qquad \Rightarrow V_z < \frac{c}{n}$$

Quindi le piastre si attraggono se la velocità V_z è minore della velocità della luce nel mezzo dielettrico interposto fra loro. Notiamo che il risultato non cambia se si considera la piastra caricata positivamente: entrambe le forze cambiano verso, ma l'interazione elettrica tende comunque ad avvicinare le piastre e quella magnetica ad allontanarle, per cui la diseguaglianza finale resta valida.