Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 01 Luglio 2016

Esercizio 1

1) Nell'istante dell'urto si conserva sicuramente il momento angolare $\vec{L}$ rispetto all'asse di rotazione perché le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva e la cui direzione nel punto di equilibrio passa attraverso l'asse. La quantità di moto totale $\vec{P}$ non si conserva a causa della forza impulsiva esercitata dall'asse di rotazione e l'energia totale E in generale può non conservarsi a causa delle forze interne che si sviluppano durante l'urto.

2) Applichiamo la legge di conservazione del momento angolare nell'istante dell'urto:

$$\vec{L}_i = I\vec{\omega}_i = \vec{L}_f = I\vec{\omega}_f + mLV_0\hat{z}$$

dove $I = ML^2/3$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, $\vec{\omega}_i$ e $\vec{\omega}_f$ sono le velocità angolari della sbarra prima e dopo l'urto e $\hat{z}$ è la direzione dell'asse di rotazione (uscente dalla pagina nel disegno fornito con il testo). Si ottiene quindi:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i - \frac{mLV_0}{ML^2/3}\hat{z} = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$$

La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0 \quad \Rightarrow V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i$.

Il modulo della velocità angolare della sbarra prima dell'urto si ricava utilizzando la conservazione dell'energia durante la fase di discesa della sbarra, il cui centro di massa parte da un'altezza

$$h_0 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

e scende fino a $h_i = L/2$ dove abbiamo usato l'indice "0" per l'istante di partenza della sbarra e mantenuto l'indice "i" per la sbarra in posizione verticale subito prima dell'urto. Pertanto:

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + Mg\frac{L}{2}[1 + (1 - \cos\theta)] = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mg\frac{L}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_i^2 = 2\frac{Mg}{ML^2/3}\frac{L}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{3g}{L}(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\vec{\omega}_f = \left(\sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}} - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$$

L'altezza massima raggiunta dal centro di massa della sbarra si può calcolare utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto. Infatti:

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega_f^2 + \frac{MgL}{2} = E_f = K_f + U_f = 0 + Mgh \quad \Rightarrow h = \frac{L}{2}\left(\frac{L\omega_f^2}{3g} + 1\right)$$

3) La quantità di moto prima dell'urto è dovuta solo alla sbarra:

$$\vec{P}_i = M\vec{V}_{c.m.,i} = M\frac{L}{2}\omega_i\hat{x}$$

dove $\hat{x}$ è l'asse orizzontale, parallelo al piano in cui si muove la massa m. Dopo l'urto la quantità di moto comprende sia quella della sbarra, sia quella della massa m, per cui:

$$\vec{P}_f = M\vec{V}_{c.m.,f} = \left(M\frac{L}{2}\omega_f + mV_0\right)\hat{x} = \left(M\frac{L}{2}\left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right) + mV_0\right)\hat{x} = \left(M\frac{L}{2}\omega_i - \frac{3mV_0}{2} + mV_0\right)\hat{x}$$
$$= \vec{P}_i - \frac{mV_0}{2}\hat{x} \qquad \Rightarrow \Delta\vec{P} \equiv \vec{P}_f - \vec{P}_i = -\frac{mV_0}{2}\hat{x}$$

La quantità di moto non si può mai conservare.
Per quanto riguarda l'energia è ovviamente sufficiente considerare la variazione di energia cinetica, perché quella potenziale non cambia durante l'urto. L'energia cinetica iniziale è dovuta solo al moto della sbarra:

$$E_i = K_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{ML^2}{6}\omega_i^2$$

mentre quella finale comprende anche il contributo della massa m:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + \frac{m}{2}V_0^2 = \frac{ML^2}{6}\left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)^2 + \frac{m}{2}V_0^2 = \frac{ML^2}{6}\left(\omega_i^2 + \frac{9m^2V_0^2}{M^2L^2} - 6\frac{\omega_i mV_0}{ML}\right) + \frac{m}{2}V_0^2$$
$$= K_i + \frac{3m^2V_0^2}{2M} - \omega_i mV_0L + \frac{m}{2}V_0^2 = K_i + \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_iL}{V_0} + 1\right) \Rightarrow \Delta K = K_f - K_i$$
$$= \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_iL}{V_0} + 1\right)$$

A parte il caso $V_0 = 0$, che è ovviamente privo di senso, l'energia si può conservare se:

$$\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_iL}{V_0} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow V_0 = \frac{2\omega_iLM}{(3m + M)}$$

4) Per determinare il coefficiente di attrito dinamico μ_D possiamo immediatamente notare che, applicando il teorema dell'energia cinetica nel tratto fra l_1 e l_2, si ha:

$$\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{m}{2}V_2^2 = \mu_D mg(l_2 - l_1) \quad \Rightarrow \mu_D = \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g(l_2 - l_1)}\right) = 0.75$$

Se ora applichiamo nuovamente lo stesso teorema al tratto fra il punto dell'urto e $l_1$otteniamo:

$$\frac{m}{2}V_0^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = \mu_D mgl_1 \quad \Rightarrow V_0 = \sqrt{V_1^2 + 2\mu_D gl_1} = 5.57\text{m/s}$$

Esercizio 2

1) Il campo elettrico è a simmetria radiale in coordinate cilindriche e quindi può essere determinato utilizzando la legge di Gauss, applicata ad un cilindro C di raggio r ed altezza H, coassiale al filo indefinito. Il flusso di $\vec{E}$ attraverso questo cilindro vale:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_C \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi rHE(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} & r < a \\ \frac{(\lambda - 2\pi a\sigma)H}{\varepsilon_0} & r > a \end{cases}$$

Pertanto:

$$\vec{E}(r) = \hat{r}E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} & r < a \\ \frac{(\lambda - 2\pi a\sigma)}{2\pi r\varepsilon_0} r & r > a \end{cases}$$

2) Con il valore di σ riportato nel testo si ottiene subito che il campo elettrico è nullo per $r > a$. Conseguentemente:

$$V(r > a) - V(a) = -\int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad \Longrightarrow V(r > a) = V(a)$$

ovvero tutti i punti al di fuori del cilindro sono equipotenziali. Poiché il campo elettrico per $r < a$ è monotonamente decrescente, la differenza di potenziale massima all'interno di questo sistema è fra $r = b$ e $r = a$, per cui possiamo subito rispondere alla seconda parte della domanda: non esiste nessun percorso di questo tipo. Alla prima parte della domanda si risponde semplicemente con il calcolo diretto:

$$V(b < r < a) - V(b) = -\int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^r \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} \cdot \hat{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

In particolare:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} \cdot \hat{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

3) La carica su un elemento di superficie dS è:

$$dQ = -\sigma dS = -\sigma 2\pi a dz$$

dove dz è un elemento di lunghezza della superficie cilindrica. La corrispondente corrente infinitesima dI si calcola osservando che la carica dQ descrive un anello circolare di corrente in un tempo eguale al periodo di rotazione del cilindro, cioè: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pertanto:

$$dI = \frac{dQ}{T} = -\sigma 2\pi a dz \frac{\omega}{2\pi} = -\sigma a\omega dz$$

La corrente per unità di lunghezza è quindi:

$$\frac{dI}{dz} = -\sigma a\omega = -\frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

Il segno "–" implica che la corrente è <u>oraria</u>, per cui produce un campo magnetico diretto nel <u>verso negativo</u> dell'asse $\hat{z}$. Il cilindro ha la stessa simmetria e le stesse proprietà di un solenoide infinito, per cui si può applicare ad esso la formula valida per un solenoide infinito con la sostituzione:

$$nI \to \frac{dI}{dz} = -\frac{\lambda\omega}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \vec{B} = \mu_0\frac{dI}{dz}\hat{z} = -\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\hat{z}$$

4) La forza totale agente sull'elettrone è.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V}\Lambda\vec{B}) = q\left(\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} + V_\perp\hat{\theta}\Lambda\left(-\frac{\mu_0\lambda\omega}{2\pi}\right)\hat{z}\right) = \frac{q\lambda}{2\pi}\left(\frac{\hat{r}}{r\varepsilon_0} - \mu_0\omega V_\perp\hat{r}\right) = \frac{q\lambda}{2\pi}\hat{r}\left(\frac{2}{a\varepsilon_0} - \mu_0\omega V_\perp\right)$$

dove $V_\perp$ è la componente tangenziale (con il suo segno) della velocità iniziale cercata, che per ipotesi nel punto $r = a/2$ coincide con la velocità totale (in alternativa si può usare il modulo della velocità iniziale e lasciare libero il segno, cioè inserire un $(\pm)$, perché il verso della velocità non è a priori specificato). Essendo $q = -|e|$ la condizione di orbita circolare in $r = a/2$ (forza totale eguale al prodotto della massa per l'accelerazione centripeta) diventa:

$$-\frac{|e|\lambda}{2\pi}\left(\frac{2}{a\varepsilon_0} - \mu_0\omega V_\perp\right)\hat{r} = -\frac{2mV_\perp^2}{a}\hat{r}$$

Semplificando i fattori comuni, incluso il versore, si ottiene:

$$\frac{2mV_\perp^2}{a} + \mu_0\omega V_\perp\frac{|e|\lambda}{2\pi} - \frac{|e|\lambda}{\pi a\varepsilon_0} = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado ricordando che il segno di $V_\perp$ può essere anche negativo. Riducendo al denominatore comune si ha:

$$V_\perp^2 + \frac{a\mu_0\omega|e|\lambda}{4\pi m}V_\perp - \frac{|e|\lambda}{2m\pi\varepsilon_0} = 0$$

La soluzione è:

$$V_\perp = \frac{-\frac{a\mu_0\omega|e|\lambda}{4\pi m} \pm \sqrt{\frac{a^2\mu_0{}^2\omega^2e^2\lambda^2}{16\pi^2m^2} + \frac{2|e|\lambda}{m\pi\varepsilon_0}}}{2}$$

Con il segno positivo la velocità tangenziale risulta positiva, cioè diretta nel verso positivo dell'asse tangenziale $\hat{\theta}$, mentre con il segno negativo la velocità tangenziale risulta negativa, cioè diretta nel verso negativo dell'asse $\hat{\theta}$. Poiché il primo addendo è negativo, la velocità tangenziale è maggiore in modulo quando è negativa. Se la velocità tangenziale è positiva, la forza di Lorentz $\vec{V}\Lambda\vec{B}$ è diretta lungo $-\hat{r}$ ed è quindi opposta a quella elettrica, per cui è sufficiente una velocità tangenziale minore in modulo per bilanciarla; invece se la velocità è negativa la forza di Lorentz è diretta lungo $+\hat{r}$ ed è quindi concorde a quella elettrica, per cui occorre una velocità tangenziale maggiore in modulo,