Soluzione Compito di Fisica Generale I Ing. Elettronica e delle Telecomunicazioni 10/06/2016

Esercizio 1

1.1) Le condizioni di equilibrio per le masse m e M sono:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{T} = 0 \\ M\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{AS} + \vec{T} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $\vec{T}$ è la tensione della fune, $\vec{R}$ è la reazione normale del piano inclinato e $\vec{F}_{AS}$ è la forza di attrito statico. Dalla prima equazione segue subito: $\vec{T} = -m\vec{g}$, mentre nella seconda possiamo scomporre la forza peso in direzione parallela e perpendicolare al piano, ottenendo:

$$\begin{cases} Mg\cos\theta - R = 0 \\ |T - Mg\sin\theta| - F_{AS} = g|m - M\sin\theta| - F_{AS} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Nella seconda equazione del sistema (2) è necessario il valore assoluto perché si può verificare sia la situazione in cui $m > M\sin\theta$, sia la situazione in cui $m < M\sin\theta$: nel primo caso la massa m tende a trascinare M, che quindi in assenza di attrito o per attrito debole risale il piano inclinato; nel secondo caso M tende a far salire m ed in assenza di attrito o per attrito debole scende lungo il piano inclinato. Nella prima situazione quindi la forza di attrito statico è diretta verso il basso e si somma alla componente orizzontale della forza peso su M; nella seconda situazione invece è diretta verso l'alto e si somma alla tensione della corda. Sostituendo la condizione di attrito massimo $F_{AS} = \mu_S R$ si ricava:

$$\mu_S R = \mu_S Mg\cos\theta \geq g|m - M\sin\theta| \quad \Rightarrow \mu_S \geq \left|\frac{m}{M\cos\theta} - \tan\theta\right| \tag{3}$$

1.2) Utilizzando il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$K_f - K_{in} = \frac{1}{2}MV_f^2 - 0 = L_{m\vec{g}} + L_{\vec{F}_{AD}} = MgL\sin\theta - MgL\mu_D\cos\theta = MgL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) \tag{4}$$

Pertanto:

$$V_f^2 = 2gL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) \quad \Rightarrow V_f = \sqrt{2gL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)} \tag{5}$$

Notiamo che la relazione (5) ha senso solo se $\sin\theta > \mu_D\cos\theta \Rightarrow \tan\theta > \mu_D$. D'altra parte per ipotesi $\mu_S > \mu_D$, per cui la massa M inizia a scivolare se e solo se:

$$\tan\theta > \mu_S \tag{6}$$

La compressione della molla si calcola applicando il principio di conservazione dell'energia durante la fase di contatto tra la massa M e la molla stessa, in cui si è supposto trascurabile l'effetto dissipativo dell'attrito dinamico. Indicando con x la lunghezza della molla si ottiene:

$$\frac{k}{2}(L_0 - x)^2 = \frac{M}{2}V_f^2 \quad \Rightarrow (L_0 - x)^2 = \frac{M}{k}V_f^2 = \frac{2MgL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)}{k} \quad \Rightarrow x = L_0 - \sqrt{\frac{2MgL(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)}{k}} \tag{7}$$

1.3) Il moto di discesa della massa M è uniformemente accelerato, con accelerazione:

$$\vec{a} = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)\hat{x} \quad \Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{a}t = \hat{x}g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)t \tag{8}$$

dove abbiamo associato l'asse $\hat{x}$ alla direzione di discesa parallela al piano. Pertanto le potenze cercate sono:

$$\begin{cases} P_{M\vec{g}} = M\vec{g}\cdot\vec{V}(t) = Mg\sin\theta \times g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)t = Mg^2t(\sin^2\theta - \mu_D\sin\theta\cos\theta) \\ P_{\vec{F}_{AD}} = \vec{F}_{AD}\cdot\vec{V}(t) = -\mu_D Mg\cos\theta \times g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)t = Mg^2t(-\mu_D\sin\theta\cos\theta + \mu_D^2\cos^2\theta) \end{cases} \tag{9}$$

1.4) Durante il "viaggio di ritorno" sia la forza di gravità che quella di attrito dinamico rallentano la salita della massa M, per cui:

$$\vec{a} = -g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)\hat{x} \tag{10}$$

Il moto di salita è quindi uniformemente decelerato, con velocità iniziale diretta nel verso positivo dell'asse $\hat{x}$ e di modulo V_f, come si ricava immediatamente applicando il principio di conservazione dell'energia alla fase di decompressione della molla. Il tempo necessario t_r affinché la massa M raggiunga il punto più alto della traiettoria e lo spazio percorso s_r sono:

$$t_r = \frac{V_f}{a} = \frac{\sqrt{2gL(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}}{g(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)} \quad \Longrightarrow s_r = \frac{V_f^2}{2a} = \frac{2gL(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}{2g(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)} = L\frac{(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}{(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)} \tag{11}$$

Lo spazio di "ritorno" è quindi ridotto, rispetto a quello percorso nel viaggio di "andata", di un fattore $\frac{(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}{(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)}$. Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\frac{(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}{(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{2}$$

Lo stesso fattore di riduzione si applica in ogni viaggio di "andata e ritorno", per cui dopo n viaggi lo spazio percorso L_n sarà:

$$L_n = \left[\frac{(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)}{(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)}\right]^n L = \frac{1}{2^n}L \quad \Longrightarrow \text{imponendo } L_n = \frac{L}{4} \text{ si ottiene: } \frac{1}{4} = \frac{1}{2^n} \quad \Longrightarrow n = 2 \tag{12}$$

Esercizio 2

2.1) La capacità del condensatore è:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}{d} \qquad \Longrightarrow Q_0 = CV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}{d}V \tag{13}$$

2.2) La relazione fra la densità di corrente $\vec{J}(t)$ ed il campo elettrico $\vec{E}(t)$ è data dalla legge di Ohm microscopica:

$$\vec{J}(t) = \sigma_C\vec{E}(t) = -\sigma_C\frac{V(t)}{d}\hat{z} = -\sigma_C\frac{Q(t)}{dC}\hat{z} = -\sigma_C\frac{Q(t)}{d\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}{d}}\hat{z} = -\frac{\sigma_C Q(t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2}\hat{z} \tag{14}$$

dove $\hat{z}$ è un asse verticale diretto dalla piastra caricata negativamente a quella caricata positivamente. La densità di corrente è distribuita uniformemente nella sezione del conduttore, per cui:

$$I(t) = \int_{sezione}\vec{J}(t)\cdot d\vec{A} = J(t)\pi a^2 = \frac{\sigma_C}{\varepsilon_0\varepsilon_r}Q(t) \tag{15}$$

Ora osserviamo che una corrente positiva <u>diminuisce</u> la carica sull'armatura caricata positivamente, per cui:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad \Longrightarrow \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} Q(t) \;\Longrightarrow Q(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{16}$$

dove la costante tempo τ è:

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma_C} \tag{17}$$

e la costante A è fissata dalla condizione iniziale $Q(0) = Q_0 = A \quad \Longrightarrow A = Q_0$. Infine la corrente $I(t)$ è:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{18}$$

2.3) L'energia U accumulata sul condensatore e la sua resistenza interna R sono:

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{dQ_0^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi a^2} \tag{19}$$

$$R = \frac{d}{\sigma_C \pi a^2} \tag{20}$$

La potenza dissipata sulla resistenza interna è dunque:

$$P_{diss} = RI^2(t) = \frac{d}{\sigma_C \pi a^2}\frac{Q_0^2}{\tau^2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) = \frac{\sigma_C^2 d}{\sigma_C \pi a^2}\frac{Q_0^2}{(\varepsilon_0 \varepsilon_r)^2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) = \frac{\sigma_C d}{\pi a^2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \tag{21}$$

Integrando si ottiene:

$$E_{diss} = \int_0^{+\infty} RI^2(t)\,dt = \frac{\sigma_C d}{\pi a^2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)dt = \frac{\tau}{2}\frac{\sigma_C d}{\pi a^2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2\sigma_C}\frac{\sigma_C d}{\pi a^2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2} = \frac{d}{2\pi a^2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = U \tag{22}$$

2.4) Il campo elettrico si ricava dalla (14) dividendo per la conducibilità :

$$\vec{E}(t) = -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi a^2}\hat{z} \tag{23}$$

Dalla (23) e dal fatto che il condensatore è a facce piane e parallele si conclude subito che $\vec{E}(t)$ è uniforme sulla sezione del condensatore, per cui:

$$\Phi\left(\vec{E}(t)\right) = E(t)\pi a^2 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \tag{24}$$

Pertanto:

$$\frac{d\Phi\left(\vec{E}(t)\right)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{I(t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \Longrightarrow I(t) = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\Phi\left(\vec{E}(t)\right)}{dt} \tag{25}$$

(Il termine contenente la derivata del flusso è detto <u>corrente di spostamento</u>.)