

Esercizio 1

1) Per simmetria il campo elettrico è radiale, con origine nel centro della distribuzione. Applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica arbitraria S di raggio r concentrica con la distribuzione di carica si ottiene:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int,S}}{\epsilon_0}$$

ad eccezione della regione ($2a < r < 3a$) in cui il campo elettrico è nullo a priori (interno di un conduttore) per cui il flusso è zero. Per determinare la carica interna bisogna distinguere le varie regioni. Indicando con $Vol(r)$ il volume di una sfera di raggio r si ha:

- a) per $r < a$ la carica interna è quella contenuta in una sfera di raggio r , per cui: $Q_{int,S} = \rho Vol(r) = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$;
- b) per $a < r < 2a$ la carica interna è tutta la carica della distribuzione, per cui: $Q_{int,S} = \rho Vol(a) = \rho \frac{4\pi a^3}{3}$;
- c) per $2a < r < 3a$ la carica interna totale deve essere nulla, in modo da verificare la legge di Gauss. Quindi per le proprietà dei conduttori si ha la formazione di una carica indotta sulla superficie di raggio $2a$, di valore eguale ed opposto a quella totale della distribuzione, cioè $Q(2a) = -\rho Vol(a) = -\rho \frac{4\pi a^3}{3}$;
- d) per la conservazione della carica una carica indotta eguale ed opposta a quella sulla superficie di raggio $2a$ si deve depositare sulla superficie di raggio $3a$, cioè $Q(3a) = -Q(2a) = +\rho Vol(a) = +\rho \frac{4\pi a^3}{3}$. La carica interna ad una superficie sferica di raggio $r > 3a$ è quindi: $Q_{int,S} = \rho Vol(a) + Q(2a) + Q(3a) = Q(3a) = \rho \frac{4\pi a^3}{3}$.

Pertanto:
$$E(r) = \frac{Q_{int,S}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{per } r < a \\ 0 & \text{per } 2a < r < 3a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{per } a < r < 2a \text{ e } r > 3a \end{cases}$$

2) Le densità di carica si ottengono immediatamente:

$$\begin{cases} \sigma_{2a} = \frac{Q(2a)}{4\pi(2a)^2} = -\rho \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{16\pi a^2} = -\frac{\rho a}{12} \\ \sigma_{3a} = \frac{Q(3a)}{4\pi(3a)^2} = +\rho \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{36\pi a^2} = +\frac{\rho a}{27} \end{cases}$$

Verifichiamo le discontinuità dei campi ed il teorema di Coulomb:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \left(\lim_{r \rightarrow (2a)^+} E(r) - \lim_{r \rightarrow (2a)^-} E(r) \right) = -\epsilon_0 \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 (2a)^2} = -\frac{\rho a}{12} = \sigma_{2a} \\ \epsilon_0 \left(\lim_{r \rightarrow (3a)^+} E(r) - \lim_{r \rightarrow (3a)^-} E(r) \right) = +\epsilon_0 \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 (3a)^2} = +\frac{\rho a}{27} = \sigma_{3a} \end{cases}$$

3) Quando la superficie esterna viene connessa a terra il campo elettrico per $r > 3a$ diventa nullo: infatti, essendo nulla la differenza di potenziale fra tale superficie e l'infinito, l'integrale del campo elettrico fra $r = 3a$ e $r = \infty$ deve essere zero. Poiché il campo non può essere a segno variabile, l'unica possibilità è che esso sia nullo ovunque. Pertanto la carica interna ad una sfera di raggio $r > 3a$ deve essere zero ed essendo la distribuzione di carica e la superficie interna del conduttore isolate da quella esterna, la superficie esterna ($r = 3a$) deve essere scarica, cioè deve essersi scaricata verso terra. Per il resto la situazione rimane invariata: il campo nelle regioni $r < a$, $a < r < 2a$ e $2a < r < 3a$ non cambia e conseguentemente la carica sulla superficie interna ($r = 2a$) resta quella calcolata nel punto 1).

Esercizio 2

1) Il campo di induzione magnetica del filo posto nell'origine degli assi con la corrente che scorre nel verso positivo dell'asse z è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

Applichiamo allora la prima legge di Laplace ai quattro lati della spira:

$$a) d\vec{F}_{AB} = id\vec{l}_{AB} \wedge \vec{B} = -i\hat{r}_{AB} dr \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}_{AB} = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

dove r è la distanza dall'origine di un elemento del tratto di spira \overline{AB} e abbiamo indicato con \hat{r}_{AB} e $\hat{\theta}_{AB}$ i versori polari relativi al lato \overline{AB} . Si noti che per il versore \hat{z} non ci sono indici, perché il versore \hat{z} è fisso (sempre ortogonale al piano della spira);

$$b) d\vec{F}_{BC} = id\vec{l}_{BC} \wedge \vec{B} = -i\hat{\theta}_{BC} b d\theta \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \hat{\theta}_{BC} = 0$$

perché il campo ed il lato curvo sono entrambi diretti tangenzialmente;

$$c) d\vec{F}_{CD} = id\vec{l}_{CD} \wedge \vec{B} = +i\hat{r}_{CD} dr \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}_{CD} = +\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

in quanto l'unica differenza rispetto al caso a) è il verso della corrente;

$$d) d\vec{F}_{DA} = id\vec{l}_{DA} \wedge \vec{B} = -i\hat{\theta}_{DA} a d\theta \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\theta}_{DA} = 0$$

esattamente come nel caso b).

La forza quindi è diversa da zero solo sui lati rettilinei e vale:

$$\vec{F}_{AB} = \int_{AB} (-\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \int_a^b (-\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{F}_{CD} = \int_{CD} (+\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \int_a^b (+\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = +\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Poiché $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{CD}$ e le forze sugli altri due lati sono nulle, la forza risultante sulla spira è zero. Si noti che questo non poteva essere affermato a priori, anche se la spira è un circuito chiuso, perché il campo nella regione della spira non è uniforme (è diretto tangenzialmente e scala come $1/r$).

2) Procedendo come nel punto 1) e con le stesse notazioni calcoliamo il momento meccanico sui quattro lati della spira. Poiché le forze sui lati curvi \widehat{BC} e \widehat{DA} sono zero punto per punto (per cui lo sono anche i corrispondenti momenti infinitesimi), è sufficiente calcolare solo i momenti su \overline{AB} e \overline{CD} :

$$a) d\vec{\tau}_{AB} = r\hat{r}_{AB} \wedge d\vec{F}_{AB} = r\hat{r}_{AB} \wedge (-\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} dr (\hat{z} \wedge \hat{r}_{AB}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\theta}_{AB} dr \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{AB} = \int_a^b d\vec{\tau}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\theta}_{AB} (b-a)$$

$$b) d\vec{\tau}_{CD} = r\hat{r}_{CD} \wedge d\vec{F}_{CD} = r\hat{r}_{CD} \wedge (+\hat{z}) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} dr (\hat{z} \wedge \hat{r}_{CD}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\theta}_{CD} dr \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{CD} = \int_a^b d\vec{\tau}_{CD} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\theta}_{CD} (b-a)$$

Pertanto il momento risultante sulla spira è:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{AB} + \vec{\tau}_{CD} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (b-a) (\hat{\theta}_{AB} - \hat{\theta}_{CD})$$

La differenza dei versori si calcola utilizzando le componenti cartesiane. Le componenti del versore \hat{r}_{AB} sono $(\cos \theta, \sin \theta)$, per cui per ortogonalità: $\hat{\theta}_{AB} = (-\sin \theta, \cos \theta)$; analogamente le componenti del versore \hat{r}_{CD} sono $(\cos \theta, -\sin \theta)$, per cui: $\hat{\theta}_{CD} = (\sin \theta, \cos \theta) \quad \Rightarrow (\hat{\theta}_{AB} - \hat{\theta}_{CD}) = -2\hat{x} \sin \theta = -\hat{x}\sqrt{3}$.

Il momento risultante è quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{AB} + \vec{\tau}_{CD} = -\hat{x}\sqrt{3}\frac{\mu_0 i I}{2\pi}(b-a)$$

In questo risultato alcuni ingredienti potevano essere scritti a priori, senza alcun calcolo:

- $\mu_0 I$ nasce dal campo del filo percorso da corrente;
- i deriva dalla formula di Laplace;
- $(b-a)$ è necessario per ragioni dimensionali e perché il momento si deve annullare quando la spira diventa una linea, cioè per $b=a$: l'unica combinazione possibile di due lunghezze che si annulli quando esse sono eguali e sia lineare in entrambe è la differenza;
- la dipendenza dall'angolo non è a priori banale, ma deve essere coerente con l'annullamento del momento quando l'area della spira diventa zero: $\sin\theta$ è una possibilità (non l'unica).

Ci attendiamo quindi che calcolando il momento secondo la formula usuale per campi uniformi il risultato contenga gli stessi fattori dimensionali e differisca solo per la parte numerica.

3) Il momento magnetico della spira è:

$$\vec{\mu} = iA\hat{n} = i\theta(b^2 - a^2)\hat{z} = i\frac{\pi}{3}(b^2 - a^2)\hat{z}$$

per cui, applicando la formula valida per campi uniformi con il campo al centro della spira si ha:

$$\vec{\tau}_{B \text{ uniforme}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}((a+b)/2) = i\frac{\pi}{3}(b^2 - a^2)\hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I \hat{y}}{2\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)} = -\frac{\mu_0 I i (b-a)}{3} \hat{x}$$

Confrontando con la formula precedente si può notare che l'unica differenza è, come previsto, nel fattore numerico: $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \leftrightarrow \frac{1}{3}$. La somiglianza diventa ancora maggiore se non si sostituiscono i valori di $\sin\theta$ e θ .

Infatti:

$$\vec{\tau}_{B \text{ uniforme}} = -\hat{x} \frac{\mu_0 I i (b-a)}{\pi} \theta; \quad \vec{\tau} = -\hat{x} \frac{\mu_0 I i (b-a)}{\pi} \sin\theta.$$

Come prevedibile il momento calcolato nell'ipotesi di campo uniforme diventa via via sempre più simile a quello esatto al diminuire dell'angolo θ , cioè delle dimensioni della spira.