

Soluzione compitino Fisica Generale I Ing. Elettronica e Telecomunicazioni 29 Aprile 2016
Esercizio 1

1) L'equazione del moto della pallina m , se il corpo M è fermo rispetto al tavolo, è quella di un pendolo, ovvero:

$$m\vec{a} = m(\vec{a}_c + \vec{a}_{\parallel}) = -m\frac{v^2(\theta)}{L}\hat{L} + m\vec{a}_{\parallel} = m\vec{g} + \vec{T}$$

dove la velocità è misurata in corrispondenza dell'angolo θ formato dal filo con la direzione verticale. La velocità $V^2(\theta)$ si ricava utilizzando la conservazione dell'energia. Per $\theta = \theta_0$ la sferetta ha solo energia potenziale; pertanto, scegliendo lo zero dell'energia potenziale per $\theta = \pi/2$, si ha:

$$E = -mgL \cos \theta_0 = -mgL \cos \theta + \frac{m}{2}V^2(\theta) \Rightarrow V^2(\theta) = 2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

ed in particolare:

$$V^2(0) = 2gL(1 - \cos \theta_0)$$

Quando il filo che sostiene la massa m raggiunge la direzione verticale ($\theta = 0$) l'accelerazione tangenziale è nulla e tutta l'accelerazione è centripeta, per cui:

$$\vec{T} = -m\frac{V^2(0)}{L}\hat{L} - m\vec{g} = -m\hat{L}\left(g + \frac{V^2(0)}{L}\right)$$

da cui:

$$\vec{T} = -m\frac{V^2(0)}{L}\hat{L} - m\vec{g} = -m\hat{L}\left(g + \frac{2gL(1 - \cos \theta_0)}{L}\right) = -mg\hat{L}(3 - 2\cos \theta_0)$$

2) Sul corpo di massa M agiscono la forza peso $M\vec{g}$, la reazione ortogonale del piano $\vec{R}$, la tensione della fune $\vec{T}$ e la forza di attrito statico $\vec{F}_S$. La reazione ortogonale e la forza peso sono eguali ed opposte, per cui la massima forza d'attrito statico ha intensità $|\vec{F}_S| = \mu_s Mg$, diretta in verso opposto alla tensione della fune. Il corpo rimane fermo fin quando:

$$|\vec{F}_S| = \mu_s Mg \geq T \Rightarrow \mu_s \geq \frac{T}{Mg} = mg \frac{(3 - 2\cos \theta_0)}{Mg} = \frac{m}{M}(3 - 2\cos \theta_0)$$

Per $\theta_0 = 0$ la massa non oscilla e quindi la condizione di equilibrio si può ottenere immediatamente richiedendo che la pallina di massa m ed il corpo di massa M siano entrambi fermi. Applicando questa condizione alla pallina si ha: $\vec{T} + m\vec{g} = 0 \Rightarrow T = mg$; applicandola al corpo di massa M : $\vec{T} + \vec{F}_S = 0 \Rightarrow F_S = T = mg$,

da cui:

$$|\vec{F}_S| = \mu_s Mg \geq mg \Rightarrow \mu_s \geq \frac{m}{M}$$

esattamente il risultato che si ottiene ponendo $\theta_0 = 0$ nella relazione precedente.

3) Nel sistema di riferimento del tavolo la massa m è soggetta alla forza apparente $-m\vec{a}$, per cui la condizione che la massa m sia ferma rispetto al tavolo è:

$$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{T} = m(\vec{a} - \vec{g})$$

La tensione ha quindi una componente nella direzione verticale ($-m\vec{g}$) ed una in direzione orizzontale ($m\vec{a}$), per cui la direzione della tensione (che corrisponde a quella del filo) forma un angolo θ^* con la verticale definito dalla relazione:

$$\tan \theta^* = \frac{a}{g}$$

Il modulo della tensione risulta quindi:

$$|\vec{T}| = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

Se il corpo di massa M è fermo rispetto al tavolo, la sua accelerazione vista dal sistema non inerziale è 0; pertanto:

$$0 = \sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{F}_S - M\vec{a} = (|\vec{F}_S| - |\vec{T}| - Ma)\hat{x}$$

in quanto il trascinamento del corpo è assicurato dalla forza di attrito statico. Si ottiene quindi:

$$0 = F_S - m\sqrt{a^2 + g^2} - Ma$$

la cui soluzione per la forza di attrito statico è:

$$F_S = Ma + m\sqrt{a^2 + g^2} \geq Mg\mu_s$$

Il minimo coefficiente di attrito statico è quindi:

$$\mu_s = \frac{Ma + m\sqrt{a^2 + g^2}}{Mg} = \frac{a}{g} + \frac{m\sqrt{a^2 + g^2}}{Mg} \approx 0.31$$

Esercizio 2

1) Oltre la gravità (che non è impulsiva) l'unica forza impulsiva del sistema è la reazione dell'asse di rotazione, che per definizione è applicata nell'asse stesso. Pertanto il momento angolare rispetto all'asse di rotazione $\hat{z}$ (assunto positivo nel verso uscente) si conserva sicuramente.

2) Prima e dopo l'urto si ha:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{in} = \vec{R} \wedge m\vec{V}_0 &= \hat{z}RmV_0 \sin \theta; \quad \vec{L}_{out} = \vec{R} \wedge m(\vec{V}' + \vec{\omega} \wedge \vec{R}) + I_{CM}\vec{\omega} = \hat{z}R \left(m\alpha V_0 \sin \theta + \left(\frac{M}{2} + m \right) \omega R \right) \\ \Rightarrow \omega &= RmV_0 \sin \theta (1 - \alpha) \frac{2}{(M + 2m)R^2} = \frac{2mV_0 \sin \theta (1 - \alpha)}{(M + 2m)R} \end{aligned}$$

Essendo $\alpha < 1$, la velocità angolare ω è positiva (rotazione antioraria). Si può avere $\omega = 0$ per:

- a) $\alpha = 1$: l'urto cambia solo la direzione, ma non il modulo della velocità del proiettile (rimbalzo elastico);
- b) $\sin \theta = 0$ ovvero $\theta = 0$: l'urto è ad incidenza normale.

3) La quantità di moto totale è dovuta solo al proiettile, in quanto il centro di massa del disco rimane fermo; si può quindi affermare a priori che la quantità di moto non si conserva. In generale, fissando un asse $\hat{x}$ con origine nel centro del disco e diretto verso destra ed un asse $\hat{y}$ verso l'alto, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in} &= m[V'(\hat{x} \cos 2\theta + \hat{y} \sin 2\theta) + \omega R(-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta)] - (-mV_0\hat{x}) \\ &= m(\hat{x}(V_0(1 + \alpha \cos 2\theta) - \omega R \sin \theta) + \hat{y}(\alpha V_0 \sin 2\theta + \omega R \cos \theta)) \end{aligned}$$

L'unico caso in cui $\vec{p}_{fin} = \vec{p}_{in}$ è quello in cui $\alpha = 1$ (e quindi $\omega = 0$) e $\theta = \pi/2$, che equivale ad un "non urto".

La variazione di quantità di moto è dovuta alla forza impulsiva esercitata dall'asse di rotazione.
Per quanto riguarda l'energia meccanica si ha:

$$\begin{aligned}
 E_{fin} - E_{in} &= K_{fin} - K_{in} = \frac{m}{2} (\vec{V}' + \vec{\omega} \wedge \vec{R})^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 - \frac{m}{2} V_0^2 \\
 &= \frac{m}{2} V_0^2 (\alpha^2 - 1) + \left(\frac{M}{2} + m \right) \frac{\omega^2 R^2}{2} + m \vec{V}' \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) \\
 &= \frac{m}{2} V_0^2 (\alpha^2 - 1) \\
 &\quad + m V_0 \alpha \omega R \sin \theta + \left(\frac{M}{2} + m \right) \frac{\omega^2 R^2}{2} = \frac{m}{2} V_0^2 (\alpha^2 - 1) + \frac{2m^2 V_0^2 \sin^2 \theta \alpha (1 - \alpha)}{(M + 2m)} \\
 &\quad + \left(\frac{M + 2m}{2} \right) \frac{R^2 4m^2 V_0^2 \sin^2 \theta (1 - \alpha)^2}{(M + 2m)^2 R^2} \\
 &= \frac{m}{2} V_0^2 \left[(\alpha^2 - 1) + \frac{m \sin^2 \theta (1 - \alpha)}{(M + 2m)} (4\alpha + 2 - 2\alpha) \right] \\
 &= \frac{m}{2} V_0^2 \left[(\alpha^2 - 1) + \frac{2m \sin^2 \theta (1 - \alpha^2)}{(M + 2m)} \right] = \frac{m}{2} V_0^2 (1 - \alpha^2) \left[\frac{2m \sin^2 \theta}{(M + 2m)} - 1 \right] \\
 &= -\frac{m}{2} V_0^2 (1 - \alpha^2) \left[\frac{M + 2m \cos^2 \theta}{(M + 2m)} \right]
 \end{aligned}$$

La variazione di energia meccanica è dovuta al lavoro dell'asse e delle forze interne disco-proiettile.
Notiamo però che per $\alpha = 1$ tale variazione è zero (urto elastico); inoltre per $\theta = 0$ (incidenza normale) l'energia cinetica di rotazione è nulla (il disco non ruota).