RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome Cognome: **Matricola:** **Corso:** A B

1) L'importante gruppo commerciale *Pentathlon* ha deciso di aprire m punti vendita per rifornire n società di atletica leggera. Sia u_j il massimo numero di società che il punto vendita j è in grado di rifornire. Un'indagine di mercato ha permesso di stimare il coefficiente di soddisfacimento s_{ij} della società i nel caso in cui venisse rifornita dal punto vendita j. Se il soddisfacimento totale delle società rifornite dal punto vendita j risulterà maggiore o uguale ad una prefissata soglia S, il punto vendita riceverà un premio p_j dalla Federazione di Atletica Leggera.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di assegnare le n società agli m punti vendita massimizzando la somma dei premi ricevuti dai punti vendita nel rispetto dei vincoli di capacità.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la società } i \text{ è assegnata al punto vendita } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il punto vendita } j \text{ riceverà il premio} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Ogni società deve essere assegnata ad esattamente un punto vendita:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots n.$$

I vincoli di capacità relativi ai punti vendita devono essere rispettati:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Il punto vendita j riceverà il premio, e la corrispondente y_j potrà assumere il valore 1, se e solo se il soddisfacimento totale delle società assegnate a j risulterà maggiore o uguale a S:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j \qquad j = 1, \ldots, m.$$

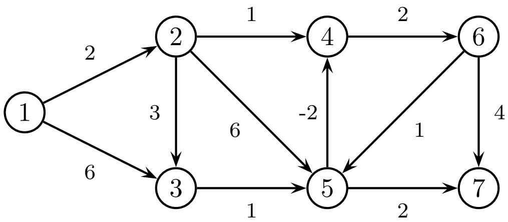
La funzione obiettivo è data dalla somma dei premi ricevuti dai punti vendita:

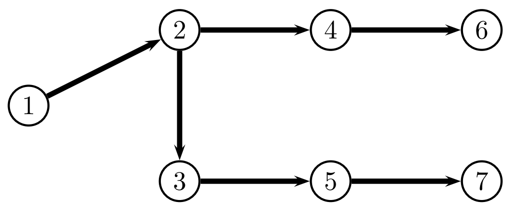
$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j.$$

La formulazione risultante è:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \geq S y_j & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





Dire se l'albero sulla destra è un albero dei cammini minimi. Cambiando il costo dell'arco $(3, 5)$ da 1 a 4, trovare un albero dei cammini minimi di radice 1 applicando eventualmente un algoritmo opportuno. L'albero così individuato è l'unico albero dei cammini minimi? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

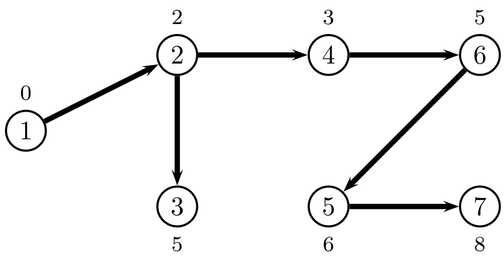
Il vettore dei potenziali associato all'albero dato è $\pi = (0, 2, 5, 3, 6, 5, 8)$. La seguente tabella mostra che tutti gli archi (i, j) non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman $\pi_i + c_{ij} \geq \pi_j$. Pertanto, l'albero dato è un albero dei cammini minimi.

(i,j)	$\pi_i + c_{ij}$	π_j
$(1,3)$	$0+6$	5
$(2,5)$	$2+6$	6
$(5,4)$	$6-2$	3
$(6,5)$	$5+1$	6
$(6,7)$	$5+4$	8

Cambiando il costo dell'arco $(3, 5)$ da 1 a 4, i potenziali dei nodi 5 e 7 diventano $\pi_5 = 9$ e $\pi_7 = 11$ e gli archi $(2, 5)$, $(6, 5)$ e $(6, 7)$ non soddisfano più le corrispondenti condizioni di Bellman. Pertanto, l'albero dato non è più un albero dei cammini minimi. Per trovarne uno, è possibile applicare l'algoritmo di Bellman-Ford. La tabella seguente riporta, per ciascuna iterazione dell'algoritmo, il vettore p dei predecessori ed il vettore d delle etichette dei nodi.

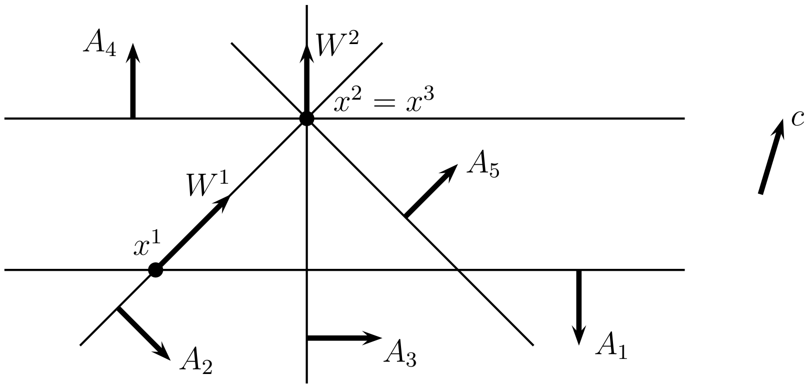
Iter	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	1	1	-1	-1	-1	-1	0	2	6	∞	∞	∞	∞
2	0	1	2	2	2	-1	-1	0	2	5	3	8	∞	∞
3	0	1	2	2	2	4	5	0	2	5	3	8	5	10
4	0	1	2	2	6	4	6	0	2	5	3	6	5	9
5	0	1	2	2	6	4	5	0	2	5	3	6	5	8
6	0	1	2	2	6	4	5	0	2	5	3	6	5	8

L'albero ottimo trovato (con le etichette finali dei nodi) è illustrato nella figura seguente:



Poiché tutti gli archi non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman con una disuguaglianza stretta, l'albero trovato è l'unico albero dei cammini minimi.

3) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.

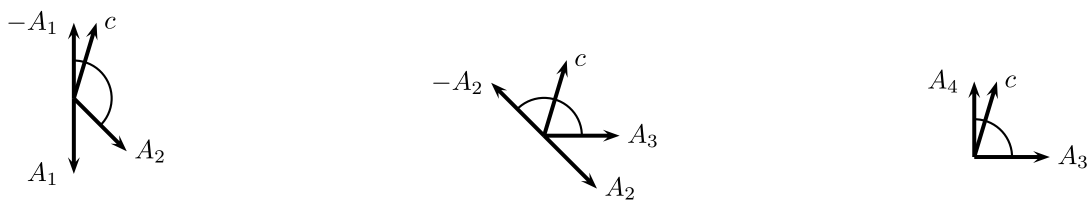


SVOLGIMENTO

Iterazione 1. $B = \{1, 2\}$, la soluzione di base primale x^1 indicata in figura è non degenere perché l'insieme dei vincoli attivi in x^1 è $I(x^1) = B$; per la soluzione di base duale $y_1 < 0$, $y_2 > 0$ in quanto c appartiene all'interno del cono generato da $-A_1$ e A_2, cioè $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(-A_1, A_2)$, come mostrato in figura (a). La soluzione di base duale è non degenere ($y_1, y_2 \neq 0$). L'indice uscente è $h = 1$, la direzione di spostamento W^1 è indicata in figura e l'indice entrante è $k = \min\{3, 4, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland).

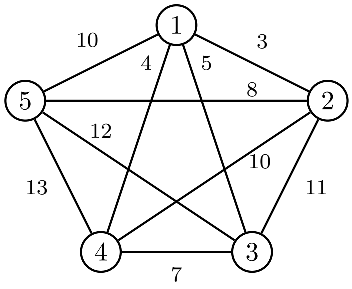
Iterazione 2. $B = \{2, 3\}$, la soluzione di base primale x^2 indicata in figura è degenere perché $I(x^2) = \{2, 3, 4, 5\}$; per la soluzione di base duale $y_2 < 0$, $y_3 > 0$ in quanto c appartiene all'interno del cono generato da $-A_2$ e A_3, cioè $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(-A_2, A_3)$, come mostrato in figura (b). La soluzione di base duale è non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$). L'indice uscente è $h = 2$, la direzione di spostamento W^2 è indicata in figura e l'indice entrante è $k = \min\{4, 5\} = 4$ (regola anticiclo di Bland).

Iterazione 3. $B = \{3, 4\}$, la soluzione di base primale $x^3 = x^2$ è degenere, la soluzione di base duale è ammissibile e non degenere perché $y_3 > 0$, $y_4 > 0$ in quanto c appartiene all'interno del cono generato da A_3 e A_4, cioè $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(A_3, A_4)$, come mostrato in figura (c). Quindi l'algoritmo termina avendo determinato la soluzione ottima primale x^3.



(a) (b) (c)

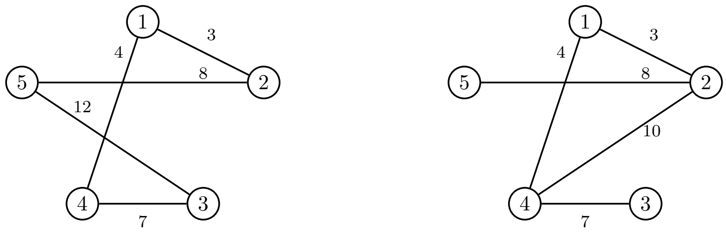
4) Si consideri il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo:



Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta risolvendo l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita istanziando nell'ordine le variabili x_{15}, x_{35}, x_{45}, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

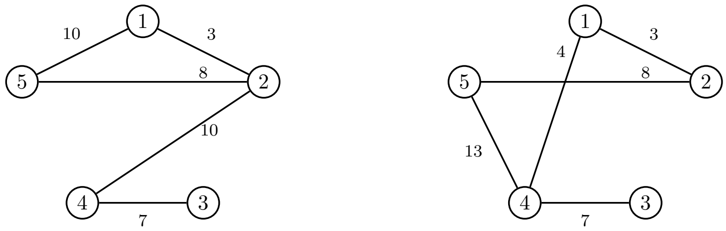
SVOLGIMENTO

L'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5 fornisce la soluzione ammissibile di figura (a) di valore 34 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 34$. L'1-albero di costo minimo è quello in figura (b) di valore 32 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 32$.



(a) (b)

Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione ramificando sulla variabile x_{15}. L'1-albero di costo minimo per P_1 è quello di figura (b) ed il nodo rimane aperto. L'1-albero di costo minimo per P_2 è quello di figura (c) di valore $38 = v_I(P_2)$. Poiché $v_I(P_2) > v_S(P)$, possiamo chiudere il nodo P_2.



(c) (d)

Ramificando sulla variabile x_{35}, l'1-albero di costo minimo per P_3 è lo stesso di P (figura (b)) e non possiamo chiudere il nodo, mentre quello per P_4 è la soluzione ammissibile di figura (a) già individuata e possiamo chiudere il nodo. Ramificando sulla variabile x_{45}, notiamo che il problema P_5 non ammette cicli hamiltoniani in quanto sono vietati 3 dei 4 archi incidenti sul nodo 5, quindi possiamo quindi chiudere il nodo. L'1-albero di costo minimo per P_6 è indicato in figura (d) e ha valore $35 = v_I(P_6)$. Poiché $v_I(P_6) > v_S(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P_6 e l'algoritmo termina individuando il ciclo hamiltoniano di costo minimo (a). La figura seguente riassume l'esplorazione dell'albero di enumerazione eseguita dall'algoritmo.