

Esercizi di Programmazione Lineare Intera

Trovare la soluzione ottima del rilassamento continuo e calcolare i corrispondenti tagli di Gomory per ciascuno dei seguenti problemi di programmazione lineare intera.

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \min 5 x_1 + 14 x_2 \\ 16 x_1 + 13 x_2 \geq 62 \\ 6 x_1 + 15 x_2 \geq 52 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2.

$$\begin{cases} \min 13 x_1 + 6 x_2 \\ 16 x_1 + 9 x_2 \geq 50 \\ 18 x_1 + 19 x_2 \geq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 3.

$$\begin{cases} \max 9 x_1 + 14 x_2 \\ 17 x_1 + 12 x_2 \leq 61 \\ 11 x_1 + 14 x_2 \leq 52 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \max 10 x_1 + 5 x_2 \\ 8 x_1 + 5 x_2 \leq 43 \\ 5 x_1 + 12 x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 5.

$$\begin{cases} \max 8 x_1 + 6 x_2 \\ 12 x_1 + 6 x_2 \leq 55 \\ 6 x_1 + 8 x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Per ciascuno dei problemi dello zaino binario riportati sotto, rispondere alle seguenti domande:

- Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti.
- Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.
- Trovare una soluzione ottima del problema applicando il metodo *Branch and Bound*. In ogni nodo dell'albero risolvere il rilassamento continuo ed istanziare l'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento. Effettuare la visita dell'albero in ampiezza.

Esercizio 6.

Oggetti	1	2	3	4
Valori	15	11	20	10
Pesi	5	2	3	4

Capacità = 8

Esercizio 7.

Oggetti	1	2	3	4
Valori	16	12	11	7
Pesi	6	5	3	2

Capacità = 8

Esercizio 8.

Oggetti	1	2	3	4
Valori	11	23	18	6
Pesi	7	6	3	2

Capacità = 8

Esercizio 9.

Oggetti	1	2	3	4
Valori	13	5	18	11
Pesi	5	4	3	2

Capacità = 8

Esercizio 10.

Oggetti	1	2	3	4
Valori	16	17	21	23
Pesi	5	3	6	2

Capacità = 8

Esercizio 11. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	20	31	24	12
2		28	29	8
3			26	21
4				22

- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5-albero di costo minimo.
- Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.
- Applicare il metodo *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12} , x_{15} , x_{25} . Effettuare la visita dell'albero in ampiezza.

Esercizio 12. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	26	18	14	15
2		12	13	19
3			11	16
4				24

- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.
- Trovare una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.
- Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili x_{12} , x_{24} , x_{34} . Effettuare la visita dell’albero in ampiezza.

Esercizio 13. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	30	35	32	25
2		28	33	26
3			24	16
4				12

- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.
- Trovare una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.
- Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili x_{34} , x_{35} , x_{45} . Effettuare la visita dell’albero in ampiezza.

Esercizio 14. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	14	16	34	18
2		20	35	21
3			22	19
4				17

- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.
- Trovare una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.
- Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili x_{12} , x_{14} , x_{24} . Effettuare la visita dell’albero in ampiezza.

Esercizio 15. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	12	20	19	7
2		18	28	11
3			16	14
4				27

- Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.
- Trovare una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.
- Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili x_{14} , x_{24} , x_{45} . Effettuare la visita dell’albero in ampiezza.

Soluzioni

Esercizio 1. Sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{26}{3}, 0\right)$. Tagli:

$$r = 1 \quad 5x_1 + 13x_2 \geq 44$$

$$r = 3 \quad 2x_1 + 5x_2 \geq 18$$

Esercizio 2. Sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{50}{9}\right)$. Tagli:

$$r = 2 \quad 15x_1 + 8x_2 \geq 45$$

$$r = 4 \quad 15x_1 + 8x_2 \geq 45$$

Esercizio 3. Sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{26}{7}\right)$. Tagli:

$$r = 2 \quad x_2 \leq 3$$

$$r = 3 \quad x_1 + 2x_2 \leq 7$$

Esercizio 4. Sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{43}{8}, 0\right)$. Tagli:

$$r = 1 \quad x_1 \leq 5$$

$$r = 4 \quad 3x_1 + x_2 \leq 16$$

Esercizio 5. Sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{5}{6}, \frac{15}{2}\right)$. Tagli:

$$r = 1: \quad 7x_1 + 8x_2 \leq 65$$

$$r = 2: \quad 12x_1 + 7x_2 \leq 62$$

Esercizio 6.

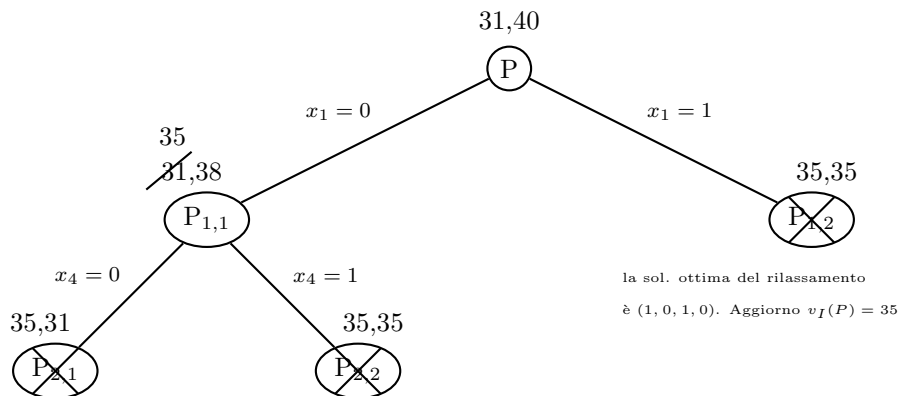
a) sol. ammissibile = $(0, 1, 1, 0)$

$$v_I(P) = 31$$

b) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{3}{5}, 1, 1, 0\right)$

$$v_S(P) = 40$$

c)



soluzione ottima = $(1, 0, 1, 0)$

valore ottimo = 35

Esercizio 7.

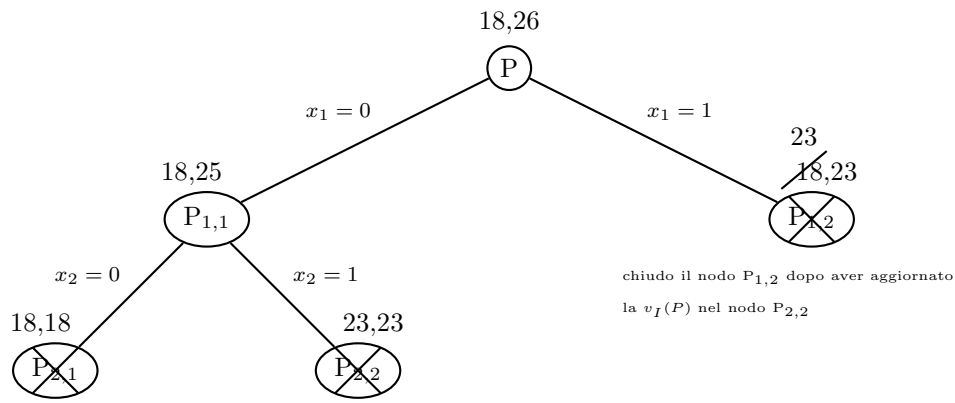
a) sol. ammissibile = $(0, 0, 1, 1)$

$$v_I(P) = 18$$

b) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{1}{2}, 0, 1, 1\right)$

$$v_S(P) = 26$$

c)



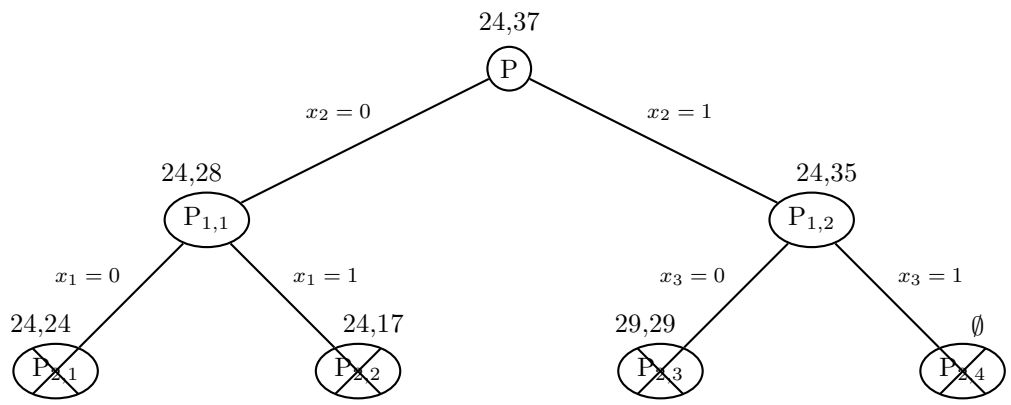
la sol. ottima del rilassamento
 è $(0, 1, 1, 0)$. Aggiorno $v_I(P) = 23$

soluzione ottima = $(0, 1, 1, 0)$

valore ottimo = 23

Esercizio 8.

- a) sol. ammissibile = $(0, 0, 1, 1)$ $v_I(P) = 24$
- b) sol. ottima del rilassamento = $(0, \frac{5}{6}, 1, 0)$ $v_S(P) = 37$
- c)



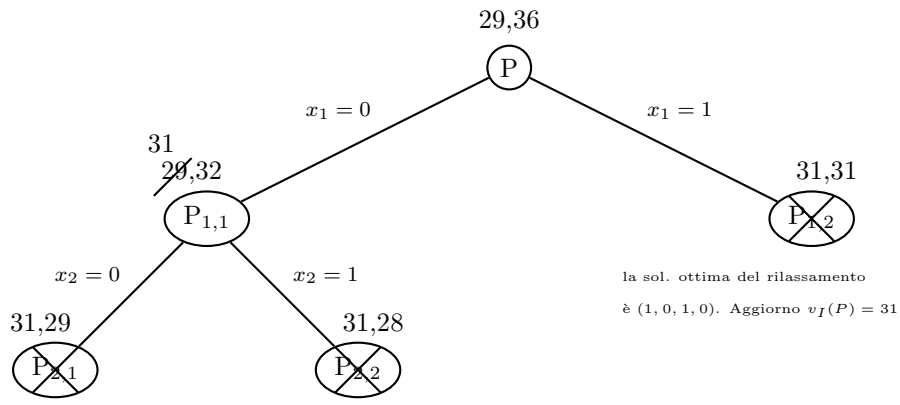
la sol. ottima del rilassamento
 è $(0, 1, 0, 1)$. Aggiorno $v_I(P) = 29$

soluzione ottima = $(0, 1, 0, 1)$

valore ottimo = 29

Esercizio 9.

- a) sol. ammissibile = $(0, 0, 1, 1)$ $v_I(P) = 29$
- b) sol. ottima del rilassamento = $(\frac{3}{5}, 0, 1, 1)$ $v_S(P) = 36$
- c)



la sol. ottima del rilassamento
 è $(1, 0, 1, 0)$. Aggiorno $v_I(P) = 31$

soluzione ottima = $(1, 0, 1, 0)$

valore ottimo = 31

Esercizio 10.

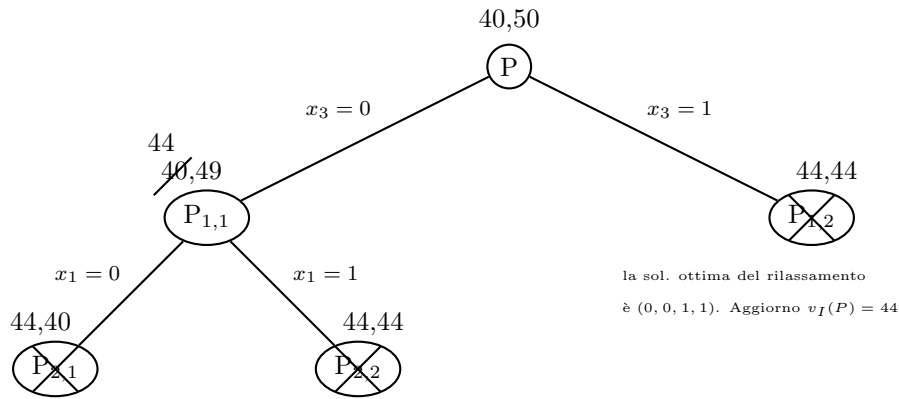
a) sol. ammissibile = $(0, 1, 0, 1)$

$$v_I(P) = 40$$

b) sol. ottima del rilassamento = $(0, 1, \frac{1}{2}, 1)$

$$v_S(P) = 50$$

c)



soluzione ottima = $(0, 0, 1, 1)$

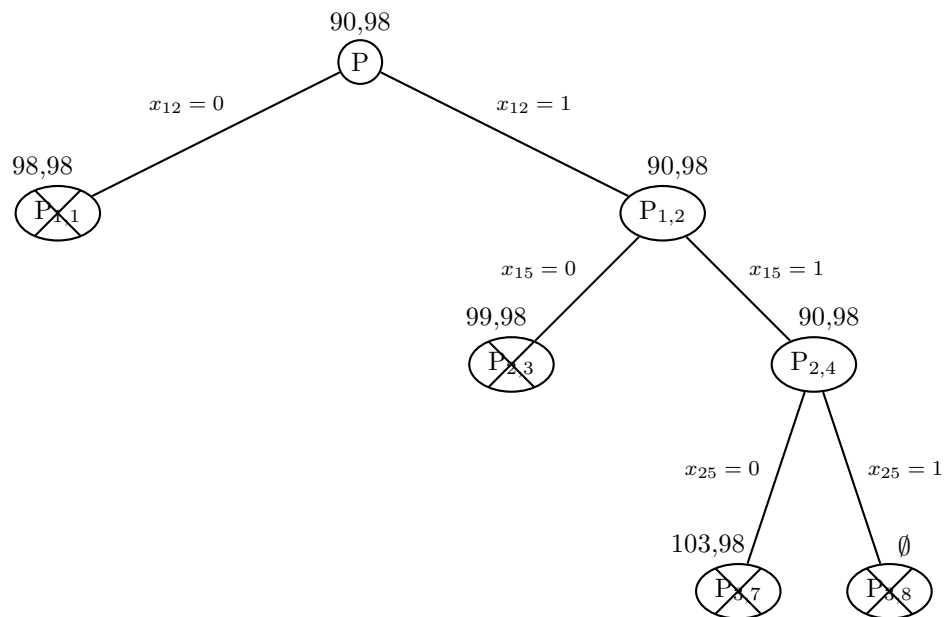
valore ottimo = 44

Esercizio 11.

a) 5-albero: $(1, 2) (1, 4) (1, 5) (2, 5) (3, 4)$ $v_I(P) = 90$

b) ciclo: $2 - 5 - 1 - 4 - 3$ $v_S(P) = 98$

c)



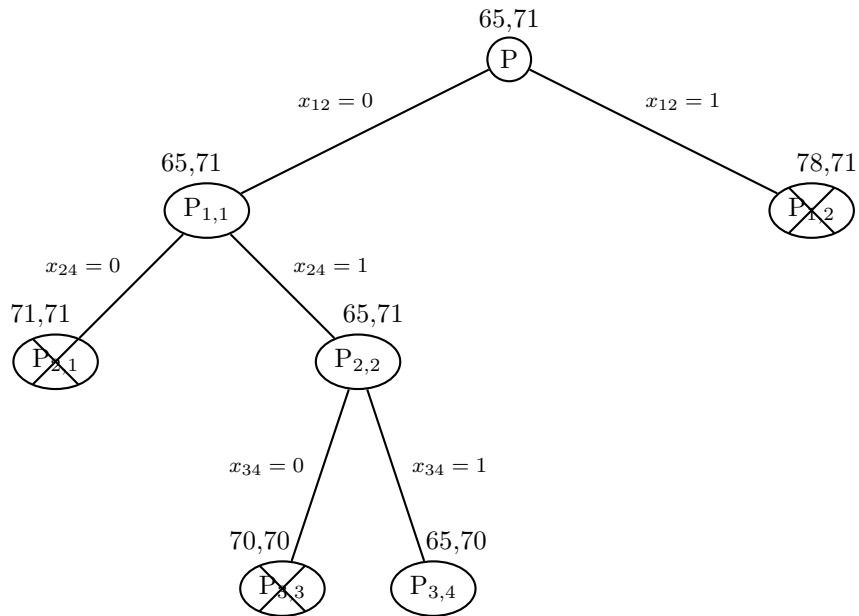
Il ciclo $2 - 5 - 1 - 4 - 3$ è ottimo.

Esercizio 12.

a) 2-albero: $(1, 4) (1, 5) (2, 3) (2, 4) (3, 4)$ $v_I(P) = 65$

b) ciclo: $1 - 4 - 3 - 2 - 5$ $v_S(P) = 71$

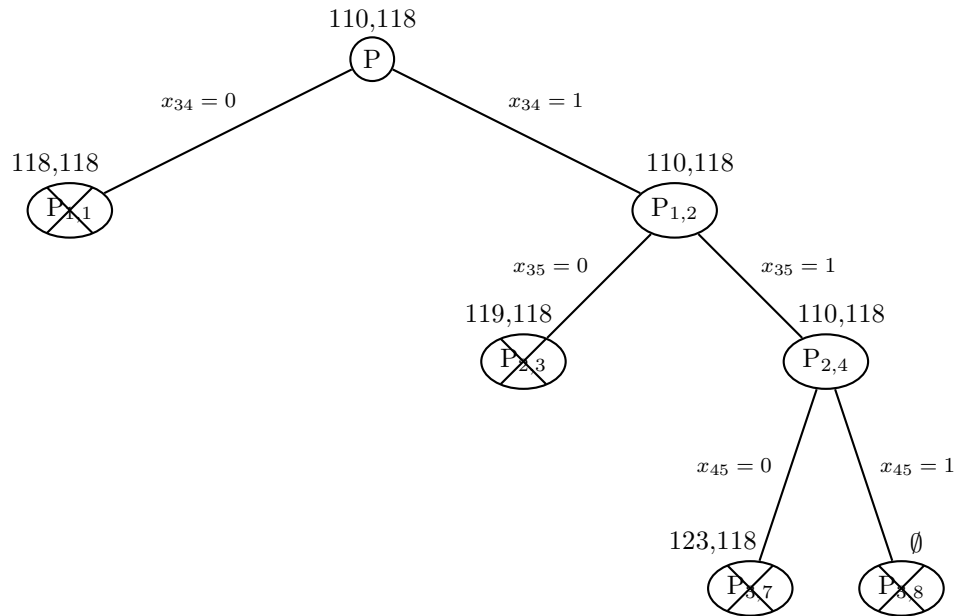
c)



il 2-albero di costo minimo
 è il ciclo 1-4-2-3-5,
 aggiorno $v_S(P) = 70$

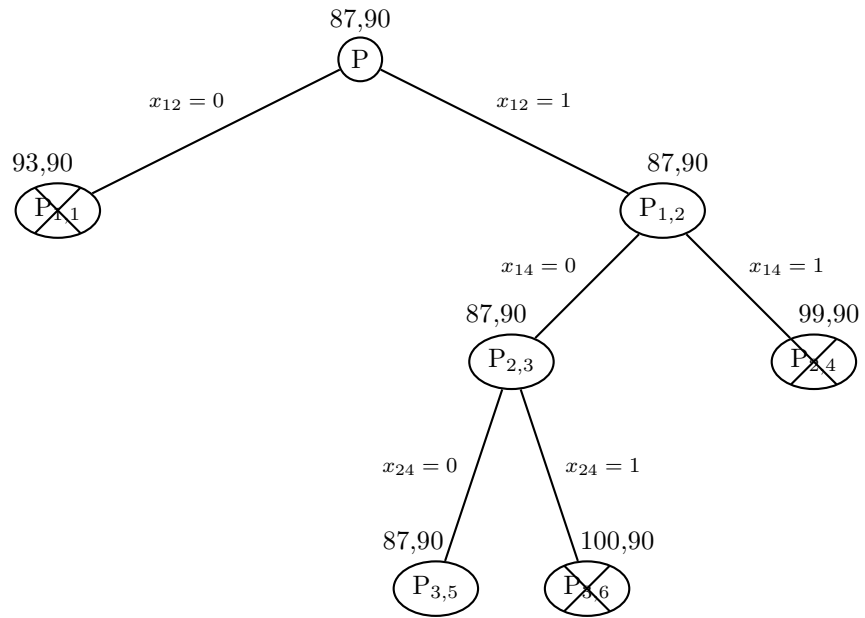
Esercizio 13.

- a) 5-albero: $(1, 2) (2, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 5)$ $v_I(P) = 110$
- b) ciclo: $4 - 5 - 3 - 2 - 1$ $v_S(P) = 118$
- c)



Esercizio 14.

- a) 5-albero: $(1, 2) (1, 3) (1, 5) (3, 4) (4, 5)$ $v_I(P) = 87$
- b) ciclo: $3 - 1 - 2 - 5 - 4$ $v_S(P) = 90$
- c)



Esercizio 15.

- a) 4-albero: $(1, 4) (1, 5) (2, 5) (3, 4) (3, 5)$ $v_I(P) = 67$
 b) ciclo: $2 - 5 - 1 - 4 - 3$ $v_S(P) = 71$
 c)

