

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome Cognome:

Matricola:

Corso: A B

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 \\
 & & & x_2 \leq 1 \\
 & x_1 & - & x_2 \leq 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 \leq 2
 \end{array}$$

Utilizzando il teorema degli scarti complementari, si individuino tutte le coppie di valori dei parametri α e β per cui la soluzione $\bar{x} = (-1, 1)$ è ottima. Scelti $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 \\
 (D) & & & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 = \alpha \\
 & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 = \beta \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 \geq 0
 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (-1, 1)$ è ammissibile per (P) . L'insieme degli indici dei vincoli attivi in \bar{x} è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : b_i - A_i \bar{x} = 0\} = \{1, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale \bar{y} (per cui $\bar{y}A = c$) che formi con \bar{x} una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_2 = \bar{y}_3 = 0$. Affinché \bar{y} sia ammissibile per (D) , essa deve soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} -y_4 = \alpha \\ y_1 + y_4 = \beta \\ y_1, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Pertanto, devono risultare $\bar{y}_1 = \alpha + \beta$, $\bar{y}_4 = -\alpha$ con $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq -\alpha$. Conseguentemente, \bar{x} è una soluzione ottima di (P) se e solo se $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq -\alpha$, nel qual caso $\bar{y} = (\alpha + \beta, 0, 0, -\alpha)$ è l'unica soluzione ottima di (D) .

Posti $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1)$ è l'unica soluzione ottima di (D) . L'insieme degli indici delle variabili duali positive è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \dots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale \hat{x} che formi con \bar{y} una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_4 - A_4 \hat{x} = 0$, ovvero il quarto vincolo deve essere attivo e quindi deve risultare $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + 2$. Una tale soluzione è ammissibile per (P) se e solo se risolve il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2 \leq 1 \\ x_1 - x_1 - 2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_1 + 2 \leq 4 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $\hat{x}_1 \leq -1$. L'insieme $X = \{(t, t + 2) : t \leq -1\}$ individua tutte le soluzioni primali ammissibili complementari alla soluzione ottima \bar{y} di (D) , pertanto costituisce l'insieme delle soluzioni ottime di (P) .

2) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rcll} \max & & x_2 & \\ & -2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & & & x_2 \leq 4 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & -x_1 & & \leq 0 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplexso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. Si discuta infine l'eventuale degenerazione delle soluzioni ottime primale e duale individuate. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

$$\text{it.1) } B = \{1, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad -2], \quad y_N = 0, \quad y^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -2],$$

$$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{4\} = 4,$$

$$W^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_N W^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta = \min\{0/2, 0/1\} = 0, \quad k = \min\{2, 3\} = 2 \text{ [cambio di base degenera]}$$

$$\text{it.2) } B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$y_B^T = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1], \quad y_N = 0, \quad y^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad \text{STOP.}$$

$B = \{1, 2\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima per il primale, mentre $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il duale. Le soluzioni sono entrambe degeneri, infatti si hanno $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\bar{y}_1 = 0$.

3) Calcolare un taglio di Gomory per il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 - x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

SVOLGIMENTO

Risolvendo graficamente il rilassamento continuo si trova che la soluzione ottima è $(0, 11/2)$. Con l'aggiunta delle variabili di scarto il rilassamento continuo assume la forma

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 - x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

La soluzione ottima è $\bar{x} = (0, 11/2, 0, 4)$ e corrisponde alla base $B = \{2, 4\}$. Pertanto

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = A_B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiché solo la seconda componente di \bar{x} è frazionaria, esiste un solo taglio di Gomory corrispondente all'indice $r = 2$, cioè

$$\left\{ \frac{3}{2} \right\} x_1 + \left\{ -\frac{1}{2} \right\} x_3 \geq \left\{ \frac{11}{2} \right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2}.$$

Dal primo vincolo si ricava $x_3 = 3x_1 + 2x_2 - 11$. Pertanto, il taglio di Gomory è equivalente a

$$2x_1 + x_2 \geq 6.$$

4) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{aligned} \max \quad & 18x_1 + 22x_2 + 16x_3 + 23x_4 \\ & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l’algoritmo “greedy” basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull’eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

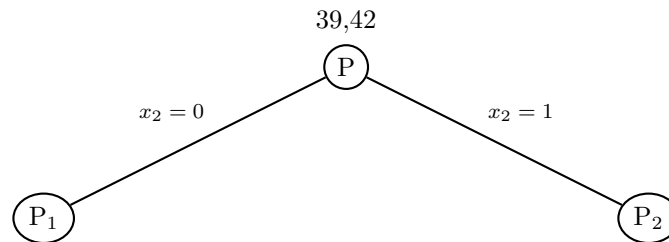
SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 sono rispettivamente $18/5 = 3.60$, $22/6 \simeq 3.66$, $16/4 = 4$ e $23/3 \simeq 7.66$.

Per applicare l’algoritmo “greedy” basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_4, x_3, x_2, x_1 : la soluzione ammissibile ottenuta è $x = (0, 0, 1, 1)$ di valore 39 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 39$.

Analizzando le variabili nello stesso ordine, si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(0, 1/6, 1, 1)$ di valore 42.6 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = \lfloor 42.6 \rfloor = 42$.

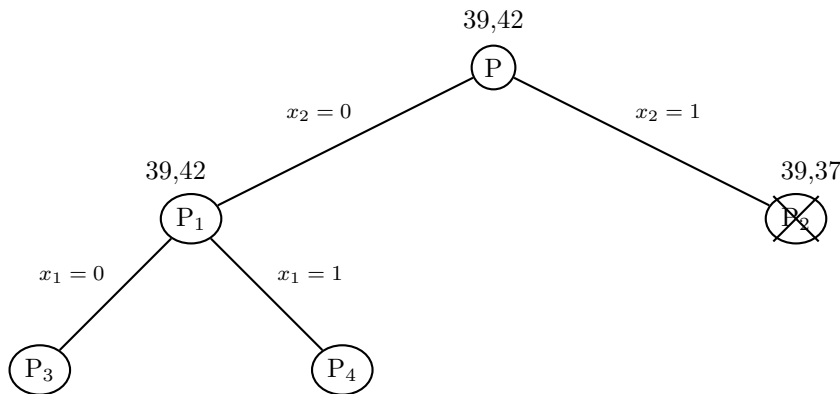
Iniziamo l’esplorazione dell’albero di enumerazione istanziando la variabile x_2 :



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(1/5, 0, 1, 1)$ di valore $42 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) > v_I(P) = 39$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P_1 rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(0, 1, 0, 2/3)$ di valore $37 = v_S(P_2)$. Poiché $v_S(P_2) < v_I(P) = 39$, possiamo chiudere il nodo P_2 .

Dal nodo P_1 istanziamo la variabile x_1 :



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(0, 0, 1, 1)$ di valore $39 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_3 .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(1, 0, 0, 1)$ di valore $41 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) > v_I(P) = 39$ e la soluzione ottenuta è ammissibile, possiamo chiudere anche il nodo P_4 e aggiornare $v_I(P) = 41$. Non essendoci altri nodi da esaminare l’algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 0, 0, 1)$ di valore 41.