RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) Judy, la nuova segretaria dell'importante compagnia *FromNineToFive*, deve sbrigare m pratiche. Conoscendo il tempo t_i necessario a sbrigare la pratica i, decide di sbrigarne alcune al mattino e di rimandare le altre al pomeriggio. Per equilibrare il proprio carico di lavoro, Judy decide di ripartire le pratiche in modo da minimizzare il massimo tra il tempo dedicato alle pratiche al mattino e quello loro dedicato al pomeriggio. Aiuta Judy a decidere quali pratiche svolgere al mattino e quali al pomeriggio, formulando il problema in termini di P.L.I.

SVOLGIMENTO

Per descrivere le decisioni da prendere introduciamo le seguenti m variabili logiche:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se la pratica } i \text{ è eseguita al mattino,} \\ 0, & \text{altrimenti (è eseguita al pomeriggio),} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Per individuare la funzione obiettivo si introduce una variabile ausiliaria T, il cui valore andrà minimizzato. I seguenti vincoli (di soglia) impongono che T rappresenti un'approssimazione per eccesso del tempo di lavoro mattutino e pomeridiano:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \leq T,$$

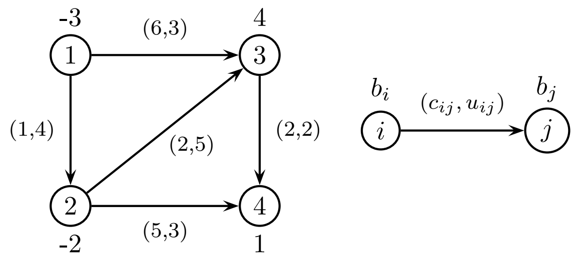
$$\sum_{i=1}^{m} t_i (1 - x_i) \leq T.$$

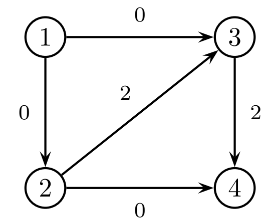
Una volta scelti i valori delle variabili x_i, ovvero una volta stabilito quali pratiche eseguire al mattino e quali al pomeriggio, il minimo valore che T può assumere è esattamente il massimo tra il tempo tempo di lavoro mattutino e quello pomeridiano.

La formulazione del problema è pertanto la seguente:

$$\begin{aligned} \min \quad & T \\ & \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \leq T \\ & \sum_{i=1}^{m} t_i (1 - x_i) \leq T \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

2) Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.



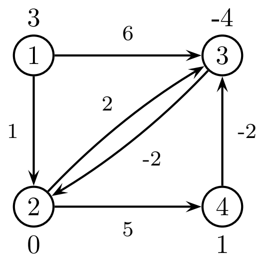


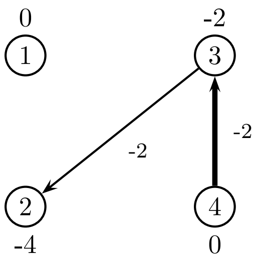
Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo.

SVOLGIMENTO

Lo pseudoflusso dato x ha costo 8 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (3, 0, -4, 1)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 4$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi degli archi e sbilanciamento dei nodi), l'albero dei cammini minimi individuato, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di θ unità di flusso lungo P con lo sbilanciamento dei nodi, il suo costo e lo sbilanciamento complessivo.

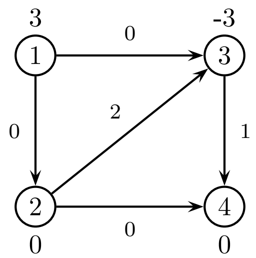
it. 1)





$\theta = 1$

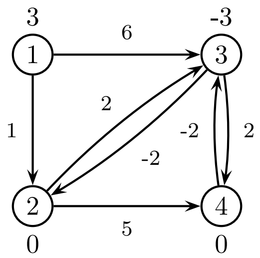
$C(P) = -2$

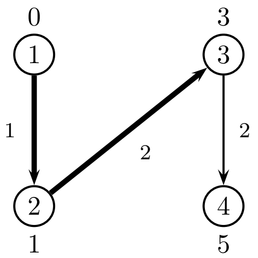


$cx = 8 - 2 = 6$

$g(x) = 4 - 1 = 3$

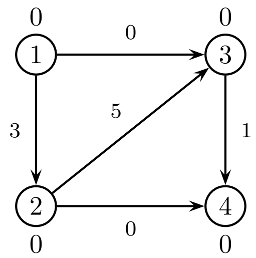
it. 2)





$\theta = 3$

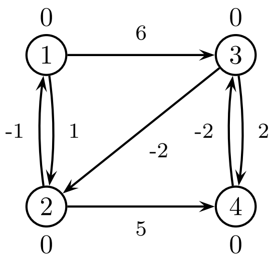
$C(P) = 3$

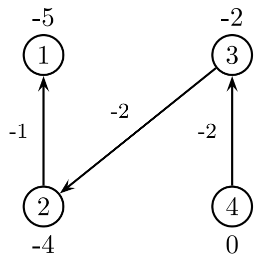


$cx = 6 + 9 = 15$

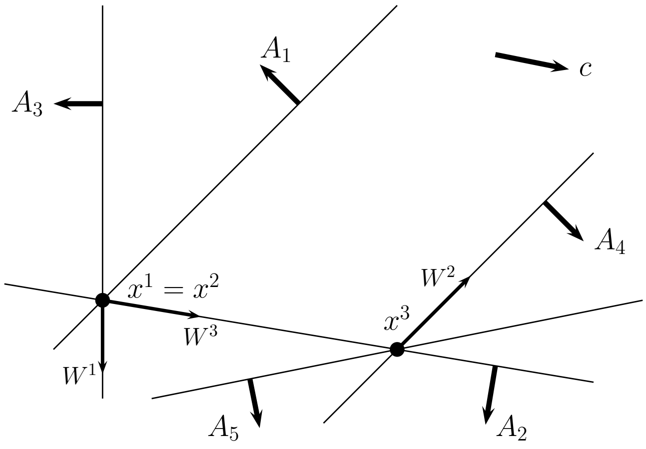
$g(x) = 3 - 3 = 0$

Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, lo pseudoflusso in figura è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che il grafo residuo associato (riportato qua sotto a sinistra) non contiene cicli di costo negativo. Infatti, l'albero riportato a destra costituisce il corrispondente albero dei cammini minimi (di radice fittizia r).





3) Si risolva geometricamente per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale il problema di P.L. in figura, partendo dalla base $B = \{1, 3\}$.



Per ogni iterazione si forniscano la base, il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, e si riportino sulla figura la soluzione primale e la direzione di spostamento, giustificando le risposte.

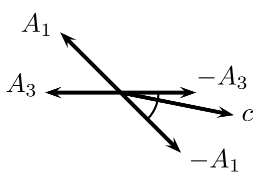
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 3\}$, $y_1 < 0$, $y_3 < 0$ (in quanto c appartiene all'interno del cono generato da $-A_1$ e $-A_3$, cioè $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(-A_1, -A_3)$, come mostrato in figura (a)), $h = \min\{1, 3\} = 1$ (regola anticiclo di Bland), $k = 2$

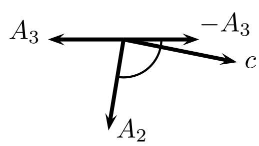
it. 2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 > 0$, $y_3 < 0$ (in quanto c appartiene all'interno del cono generato da A_2 e $-A_3$, cioè $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (b)), $h = 3$, $k = \min\{4, 5\} = 4$ (regola anticiclo di Bland)

it. 3) $B = \{2, 4\}$, $y_2 < 0$, $y_4 > 0$ (in quanto c appartiene all'interno del cono generato da $-A_2$ e A_4, cioè $c \in \operatorname{int} \operatorname{cono}(-A_2, A_4)$, come mostrato in figura (c)), $h = 2$. Poiché $A_i W^2 \leq 0$ per ogni $i \in N = \{1, 3, 5\}$ (vedi figura (d)), l'algoritmo si ferma.

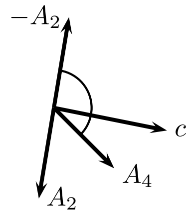
Il problema è superiormente illimitato ed il suo duale è vuoto.



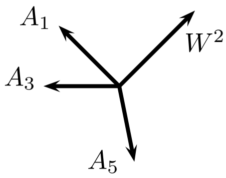
(a)



(b)



(c)



(d)

4) Calcolare un taglio di Gomory per il seguente problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 10x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \geq 0} \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z}.} \end{array}$$

SVOLGIMENTO

Risolvendo graficamente il rilassamento continuo si trova che la soluzione ottima è $(0, 9/2)$. Con l'aggiunta delle variabili di scarto il rilassamento continuo assume la forma

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & x_1 & + & 10x_2 & & & & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 11 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.} \end{array}$$

La soluzione ottima è $\bar{x} = (0, 9/2, 0, 13/2)$ e corrisponde alla base $B = \{2, 4\}$. Pertanto

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Poiché la seconda e la quarta componente di $\bar{x}$ sono frazionarie, esistono due tagli di Gomory corrispondenti agli indici $r = 2$ e $r = 4$. Il taglio relativo all'indice $r = 2$ è

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} x_1 + \left\{\frac{1}{2}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{9}{2}\right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2}.$$

Dal primo vincolo si ricava $x_3 = 9 - x_1 - 2x_2$. Pertanto, il taglio di Gomory è equivalente a

$$9 - 2x_2 \geq 1$$

cioè

$$x_2 \leq 4.$$

Il taglio relativo all'indice $r = 4$ è

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} x_1 + \left\{-\frac{1}{2}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{13}{2}\right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2},$$

che coincide con il taglio relativo all'indice $r = 2$, cioè $x_2 \leq 4$.