Fac-simile del secondo compitino di Ricerca Operativa – 11/12/2019

Esercizio 1. Si consideri il seguente problema di PL, in cui α e β sono parametri reali:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & \beta x_1 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & \alpha \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & \leq & 2
\end{array}
$$

Trovare l'insieme delle coppie di valori di α e β per cui $\bar{x} = (2, 3)$ è una soluzione ottima del problema. Giustificare la risposta.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

Risolvere il problema utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica e geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione indicare: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il passo ϑ e l'indice uscente, giustificando le risposte.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di PLI:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\min & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 8 \\
 & x_1 & & & \geq & 5 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, & & x_2 & \in \mathbb{Z} &
\end{array}
$$

Trovare la soluzione ottima del rilassamento continuo e calcolare un taglio di Gomory.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 10x_1 & + & 11x_2 & + & 14x_3 & + & 26x_4 & + & 5x_5 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & + & 2x_5 & \leq & 9 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \in \{0,1\} & &
\end{array}
$$

Trovare una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo *Branch and Bound*: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

Soluzioni

Esercizio 1. È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2,3)$ è ammissibile se e solo se $\alpha \geq -5$.
Il problema duale è:

$$
(D) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & \alpha y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\
& -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & \beta \\
& -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\
& y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & \geq & 0
\end{array}
$$

La soluzione $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile y che è in scarti complementari con $\bar{x}$. L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{2,4\}$ se $\alpha > -5$ e $I(\bar{x}) = \{1,2,4\}$ se $\alpha = -5$.

Distinguiamo i due casi $\alpha > -5$ e $\alpha = -5$.

Se $\alpha > -5$, allora una soluzione y in scarti complementari con $\bar{x}$ deve soddisfare le condizioni $y_1 = y_3 = 0$. Affinché y sia duale ammissibile, deve soddisfare il sistema

$$
\begin{cases}
y_4 = \beta \\
y_2 = 1 \\
y_2,\ y_4 \geq 0.
\end{cases}
$$

Pertanto, in questo caso, $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se $\beta \geq 0$.

Se invece $\alpha = -5$, allora una soluzione y in scarti complementari con $\bar{x}$ deve soddisfare solo la condizione $y_3 = 0$. Affinché y sia duale ammissibile, deve soddisfare il sistema

$$
\begin{cases}
-y_1 + y_4 = \beta \\
-y_1 + y_2 = 1 \\
y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0
\end{cases}
$$

che equivale al sistema

$$
\begin{cases}
y_4 = y_1 + \beta \\
y_2 = y_1 + 1 \\
y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0
\end{cases}
$$

ossia $y_1 \geq \max\{0, -\beta\}$. Pertanto, in questo caso, per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$, pertanto essa è una soluzione ottima di (P) qualunque sia il valore di $\beta \in \mathbb{R}$.

Ricapitolando, l'insieme delle coppie (α, β) per cui il punto $\bar{x}$ è ottimo è il seguente:

$$
\{(\alpha,\beta) : \ \alpha > -5,\ \beta \geq 0\} \cup \{(\alpha,\beta) : \ \alpha = -5,\ \beta \in \mathbb{R}\}.
$$

Esercizio 2. Risoluzione algebrica:

Iterazione 1). $B = \{1,2\} : A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : \ A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{3,5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\vartheta = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : \ i \in B, \ \eta_i > 0\} = \min\{0/2, 1/1\} = 0, \quad h = \min\{i \in B : \ \eta_i > 0, \ \vartheta = \bar{y}_i/\eta_i\} = 1.$$

Iterazione 2). $B = \{2,3\} : A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \min\left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{0}{1/2} \right\} = 0, \quad h = 3.$$

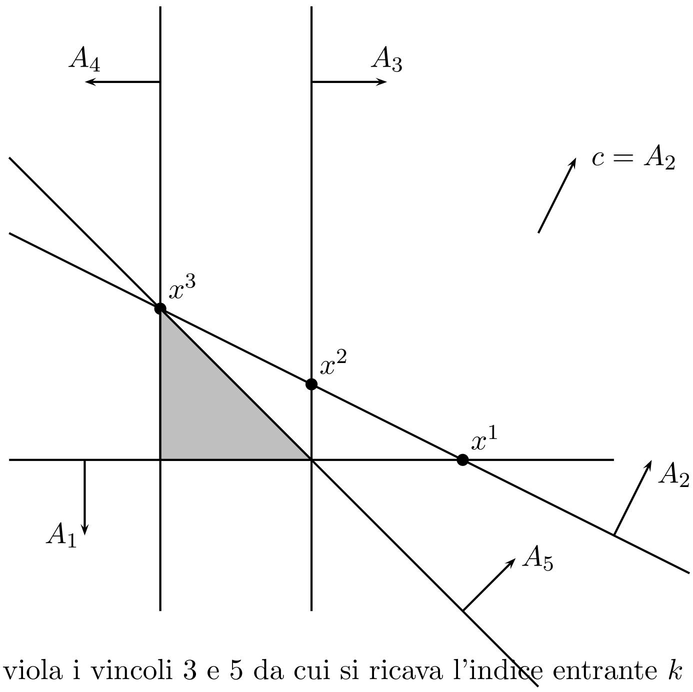
Iterazione 3). $B = \{2,5\} : A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

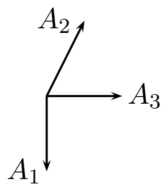
$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ STOP.}$$

Pertanto, $(0,2)$ è una soluzione ottima del primale e $(0,1,0,0,0)$ una soluzione ottima del duale.

Risoluzione geometrica:

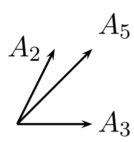


Iterazione 1). $B = \{1, 2\}$, x^1 viola i vincoli 3 e 5 da cui si ricava l'indice entrante $k = \min\{3, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland). Poiché $c = A_2$, si ha $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$. Inoltre A_3 appartiene all'interno del cono generato da A_1 e A_2, come mostrato in figura:



pertanto $A_3 = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2$ con $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$, da cui $y_1/\eta_1 = 0$ e $y_2/\eta_2 > 0$. L'indice uscente è quindi $h = 1$.

Iterazione 2). $B = \{2, 3\}$, x^2 viola solo il vincolo 5, per cui l'indice entrante è $k = 5$. Poiché $c = A_2$, si ha $y_2 = 1$ e $y_3 = 0$. Inoltre A_5 appartiene all'interno del cono generato da A_2 e A_3, come mostrato in figura:



pertanto $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 > 0$, da cui $y_2/\eta_2 > 0$ e $y_3/\eta_3 = 0$. L'indice uscente è quindi $h = 3$.

Iterazione 3). $B = \{2, 5\}$, x^3 è una soluzione primale ammissibile e quindi è ottima per il primale. Poiché $c = A_2$, si ha $y_2 = 1$ e $y_5 = 0$, quindi una soluzione ottima del duale è $(0, 1, 0, 0, 0)$.

Esercizio 3. Risolvendo graficamente il rilassamento continuo si trova la soluzione ottima $\bar{x} = (5, 3/2)$. Il rilassamento continuo con l'aggiunta delle variabili di scarto assume la forma

$$\begin{array}{lcccccccc} \min & x_1 & + & x_2 & & & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 8 \\ & x_1 & & & & & - \; x_4 & = & 5 \\ & \multicolumn{8}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0} \end{array}$$

La soluzione ottima è $(5, 3/2, 0, 0)$ e corrisponde alla base $B = \{1, 2\}$. Pertanto

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Poiché solo la seconda componente di $\bar{x}$ è frazionaria, esiste un solo taglio di Gomory corrispondente all'indice $r = 2$:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \right\} x_3 + \left\{ \frac{1}{2} \right\} x_4 \geq \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

che equivale a

$$\frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Dal primo vincolo si ricava che $x_3 = x_1 + 2x_2 - 8$ e dal secondo vincolo che $x_4 = x_1 - 5$, pertanto il taglio di Gomory è equivalente a

$$2x_1 + 2x_2 \geq 14$$

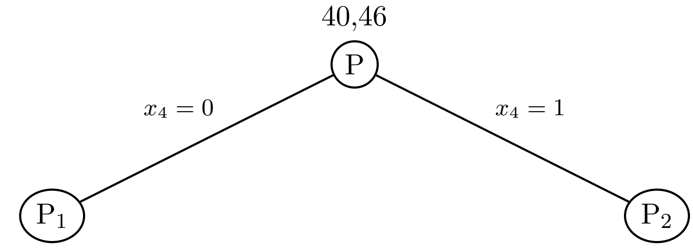
cioè

$$x_1 + x_2 \geq 7.$$

Esercizio 4. I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sono rispettivamente 10, $11/2 = 5.5$, $14/3 \simeq 4.6$, $26/7 \simeq 3.7$ e $5/2 = 2.5$. Per applicare l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_1, x_2, x_3, x_4, x_5: la soluzione ottenuta è $x = (1, 1, 1, 0, 1)$ di valore 40 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 40$.

Analizzando le variabili nello stesso ordine si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(1, 1, 1, 3/7, 0)$ di valore 46 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 46$.

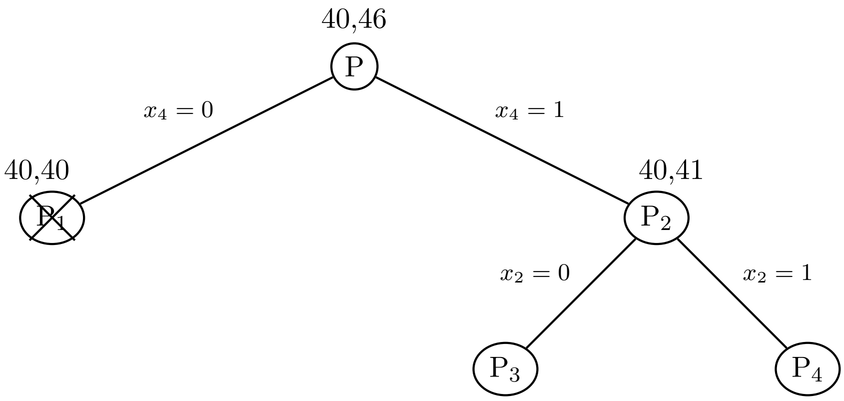
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione istanziando la variabile x_4:



La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P$_1$ è $(1, 1, 1, 0, 1)$ di valore $40 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_1$.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_2$ è $(1, 1/2, 0, 1, 0)$ di valore $41 = v_S(P_2)$. Poiché $v_S(P_2) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P$_2$ rimane aperto.

Dal nodo P$_2$ istanziamo la variabile x_2:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_3$ è $(1, 0, 1/3, 1, 0)$ di valore $40 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_3$.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_4$ è $(0, 1, 0, 1, 0)$ di valore $37 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) < v_I(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P$_4$ e l'algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 1, 1, 0, 1)$ di valore 40.